✂ -- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ -- ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

1. a) 16 a 20; **b)** 15 a 21; **c)** 11,5 a 24,5.

2. a) 4; **b)** 5; **c)** 5,5; **d)** 3,2.

3. a) Honza má pravdu. Kdyby každému bylo 13 let, dohromady by měli stejně, jako právě doopravdy mají (tj. 35 · 13 let = 3 · 11 let + 10 · 12 let + 8 · 13 let + 12 · 14 let + 2 · 15 let = 455 let).

b) Renátě je 13 let.

c) Řešení úvahou: Tím, že započítáme do souboru i sbormistra, stoupne průměrný věk všech o 0,5 roku. Věk zpěváků by vzrostl o 0,5 · 35 = 17,5 roku. O tolik let musí mít sbormistr nad 13,5 roku. Sbormistrovi je tedy 31 let.

Řešení rovnicí: Označme věk sbormistra x (let). Všem i se sbormistrem je $455 + x$ a jejich průměrný věk je $(455 + x) / 36$ let. Tedy $(455 + x) / 36 = 13{,}5$. Odtud $x = 31$.

d) Procvičujeme počítání průměrů. Je možné použít úvahu: Zvýšení věkového průměru je způsobeno vyšším věkem učitele. To, o kolik převyšuje věk učitele průměrný věk žáků třídy, je rovnoměrně rozděleno mezi všechny započítané osoby (počet žáků + 1) a připočteno k průměrnému věku žáků. Zvýšení průměrného věku třídy tedy dostaneme, když rozdíl mezi věkem učitele a věkovým průměrem žáků třídy vydělíme počtem žáků zvětšeným o jedna.

4. Řešení metodou pokus–omyl: Předpokládejme, že Martin přispěl 50 Kč. Příspěvek Petra pak bude 52 Kč a průměrný příspěvek obou chlapců 51 Kč. Jirka tak přispěje 63 Kč a celková částka bude 50 + 52 + 63 = 165 Kč. To je o 15 Kč méně než požadovaných 180 Kč. Když příspěvek Petra zvýšíme o 1 Kč, zvýší se stejně i příspěvek Martina i příspěvek Jirky. Celková částka tak vzroste o 3 Kč. My ale potřebujeme zvýšení o 15 Kč, tedy pětkrát vyšší. Na každého hocha tak připadá zvýšení o 5 Kč. Výsledek: Martin přispěl 55 Kč, Petr 57 Kč a Jirka 68 Kč.

Řešení rovnicí: Označme příspěvek Martina x Kč. Pak příspěvek Petra je $(x + 2)$ Kč. Průměr obou je $(x + 1)$ Kč. Tedy příspěvek Jirky je $(x + 13)$ Kč. Součet příspěvků je $x + (x + 2) + (x + 13) = 3x + 15$. Z rovnice $3x + 15 = 180$ máme $x = 55$.

5. a) Existují 2 řešení: (6, 11, 13) a (7, 9, 14); **b)** existuje 5 řešení: (2, 14, 14), (3, 12, 15), (4, 10, 16), (5, 8, 17), (6, 6, 18).

6. a) Existují 3 řešení: (14, 20, 20), (15, 18, 21) a (16, 16, 22);

b) existuje 8 řešení: (14, 18, 20, 20), (14, 19, 19, 20), (15, 15, 21, 21), (15, 16, 20, 21), (15, 17, 19, 21), (15, 18, 18, 21), (16, 16, 18, 22) a (16, 17, 17, 22);

c) existuje 16 řešení: (14, 16, 20, 20, 20), (14, 17, 19, 20, 20), (14, 18, 19, 19, 20), (14, 18, 18, 20, 20), (15, 15, 18, 21, 21), (15, 15, 19, 20, 21), (15, 16, 17, 21, 21), (15, 16, 18, 20, 21), (15, 16, 19, 19, 21), (15, 17, 17, 20, 21), (15, 17, 18, 19, 21), (15, 18, 18, 18, 21), (16, 16, 16, 20, 22), (16, 16, 17, 19, 22), (16, 16, 18, 18, 22) a (16, 17, 17, 18, 22).

Komentář

1. Úloha pomáhá upevnit představu, že aritmetický průměr dvou čísel je hodnota ležící uprostřed mezi nimi. Zároveň žák vidí, že obě čísla jsou od průměru stejně vzdálená, a to o polovinu jejich vzájemné vzdálenosti. To žáci využijí k řešení. Někteří mohou hledat řešení graficky na číselné ose, někteří početně. Je dobré, aby ve třídě zazněly oba přístupy.

2. Úlohy a) a b) se dobře modelují s konkrétními číselnými modely, například počty žetonů. Doporučujeme tyto vyzkoušet a vést práci k objevu, že aritmetický průměr je číslo, které reprezentuje situaci, ve které mají všechny jednotky souboru stejnou hodnotu, aniž by se změnil jejich součet (reprezentuje soubor jedinou hodnotou). Jednou ze strategií (zvláště u úlohy 2a) je strategie tzv. dorovnávání (tj. ubírání z větších hromádek a přidávání na menší). Pokud se mezi žáky objeví, doporučujeme ji prodiskutovat s celou třídou a navázat na ni u dalších úloh. Strategie se ukáže neefektivní u úloh c) a d), ale její podstata stále poskytuje přiměřený odhad (bude to více než 5, méně než 6 atd.).

3. Tato úloha nechává žáky pracovat s aritmetickým průměrem a jeho změnou po přidání dalšího prvku do souboru pozorovaných dat. V a) je vhodné zaměřit pozornost dětí na graf a vhodně volit otázky (Kolika dětem je 15 let? Kolik je dětí ve sboru?). Aritmetický výpočet průměrného věku je vhodné porovnat se strategií dorovnávání (když je 10 žáků dvanáctiletých, stačí 10 čtrnáctiletých dorovnat věk dvanáctiletých na průměr 13 let a ještě zbudou 2 čtrnáctiletí, kteří mohou být vyvážení jedním jedenáctiletým atd.). Tím upevňujeme koncept průměrné hodnoty ne jako formálně vypočítaného čísla, ale jako hodnoty s reálným smyslem a navodíme řešení b) a c). K řešení d) je vhodné připravit soubor dat narození žáků třídy a diskutovat, s jakým vyjádřením věku budeme pracovat, zda s přesností na poloviny roku, nebo na měsíce.

4. Situace je složitá různorodostí podmínek. Výše uvedené řešení vychází z odhadu vkladu Martina. Stejně by bylo možné začínat s odhadem vkladu Petra. Začínat s odhadem vkladu Jirky by vedlo k složitější, ale z hlediska didaktického účinku plodné úvaze. Jiný a snad i nápaditější přístup než začínat s vkladem některého z hochů je začínat u průměru 60 Kč a předpokladu, že Petr i Martin přispěli stejně. Když každý z nich přispěje $(60 - p)$ Kč, tak Jirka musí přispět $(60 + 2p)$ Kč. Protože rozdíl mezi $2p$ a $-p$ je 12 (to je rozumné vizualizovat na číselné ose), je $p = 4$. Když úlohu přeneseme z kontextu peněz do kontextu věku, stává se pro žáky přístupnější: Manželům Novákovým a jejich příteli Jirkovi je dohromady 180 let. Jirka je o 12 let starší, než je věkový průměr manželů. Paní Nováková je o 2 roky mladší než pan Novák. Kolik je kterému let?