17 KOMBINATORIKA

VSTUPNÍ ÚLOHA: **SLOVA**

Z písmen K, O, R lze vytvořit šest třípísmenných slov: KOR, ROK, OKR, ORK, KRO a RKO. Každé písmeno je použito ve slově právě jednou, žádné písmeno se neopakuje. Není nutné, aby vytvořené slovo mělo nějaký význam. U prvních dvou slov jsou K a R odděleny samohláskou O, u posledních čtyř stojí souhlásky K a R vedle sebe.

Kolik šestipísmenných slov lze vytvořit ze šesti písmen E, O, U, K, L, M, jestliže žádné písmeno se ve slově nesmí opakovat a vedle sebe nesmí stát ani dvě samohlásky, ani dvě souhlásky?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

Jestliže samohlásku označíme znakem ○ a souhlásku znakem □, pak každé hledané slovo má buď tvar □○□○□○, nebo tvar ○□○□○□. Ptáme se, kolik je slov tvaru □○□○□○. Jedno takové slovo je například KELOMU. Nechme samohlásky, jak jsou, a měňme pozice souhlásek. Dostaneme dalších pět slov LEMOKU, MEKOLU, KEMOLU, MELOKU, LEKOMU. Tedy slov typu □E□O□U je šest. Stejně šest je i slov typu □U□E□O. Ke každému pořadí samohlásek existuje 6 slov. Pořadí samohlásek je stejně tolik, kolik bylo pořadí souhlásek, tedy 6. Všech hledaných slov tvaru □○□○□○ je tedy 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 36. Je jasné, že stejně je i všech hledaných slov tvaru ○□○□○□. Tedy všech hledaných slov je 72.

Přehledně lze zapsat všech 36 řešení tvaru □○□○□○ do tabulky, ve které sloupce budou nadepsané trojicí souhlásek a řádky trojicí samohlásek.

Komentář. Vypisování tabulky pomůže žákům pochopit všechny tři myšlenky, které tvoří páteř výše uvedeného řešení. Pracnost vypisování možná přivede některé žáky k rychlejšímu stromovému grafu.

	K_L_M_	L_M_K_	M_K_L_	K_M_L_	M_L_K_	L_K_M_
EOU	KELOMU	LEMOKU	MEKOLU	KEMOLU	MELOKU	LEKOMU
OUE	KOLUME	LOMUKE	MOKULE	KOMULE	MOLUKE	LOKUME
UEO	KULEMO	LUMEKO	MUKELO	KUMELO	MULEKO	LUKEMO
EUO	KELUMO	LEMUKO	MEKULO	KEMULO	MELUKO	LEKUMO
UOE	KULOME	LUMOKE	MUKOLE	KUMOLE	MULOKE	LUKOME
OEU	KOLEMU	LOMEKU	MOKELU	KOMELU	MOLEKU	LOKEMU

Žákům, pro které je úloha příliš náročná, dáme obdobnou úlohu s menším počtem písmen. Všech pětipísmenných slov tvořených písmeny E, O, K, L, M, u nichž vedle sebe nesmí stát dvě samohlásky ani dvě souhlásky, je 12. Když ubereme písmeno M, bude hledaných čtyřpísmenných slov 8. Naopak, když k daným písmenům E, O, U, K, L, M přidáme N, bude počet hledaných slov 144. Zde totiž každé slovo má tvar □○□○□○□, pořadí samohlásek je 6, pořadí souhlásek je 24. Tedy výsledek je 24 × 6 = 144.

Uvedenou úlohu i její další variace lze vložit do různých kontextů. Například z číslic 1, 2, 3, 4, 5 a 6 tvořit všechna šestimístná čísla, ve kterých se žádná číslice neopakuje a dvě sudé ani dvě liché číslice nestojí vedle sebe. Nebo hledáme, kolika způsoby je možné do zástupu postavit Evu, Olgu, Uršulu, Karla, Láďu a Martina tak, že buď za každým hochem stojí dívka, nebo za každou dívkou hoch.

✂ -------------------- ✂

DALŠÍ ÚLOHY

Ve všech následujících úlohách tvoříme slova z jistého počtu písmen. Ve všech případech se žádné písmeno ve tvořeném slově nesmí opakovat a každé z uvedených písmen musí být v slově použito.

1. Z písmen A, B, R, T tvoříme slova, v nichž samohláska je buď prvním, nebo posledním písmenem. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

2. Z písmen A, B, R, T tvoříme slova, v nichž samohláska není ani první, ani poslední písmeno. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

3. Z písmen A, E, B, R, T tvoříme slova, v nichž první i poslední písmeno je samohláska. Kolik takových slov můžeme vytvořit?