11. Na několika pětimístných číslech n prověř, že $9|(n - CS(n))$, kde $CS(n)$ je ciferný součet čísla n. Na základě této zkušenosti vyslov kritérium pro dělitelnost číslem 9 i číslem 3.

12. Formuluj a dokaž kritérium dělitelnosti číslem 6.

✂ ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ✂

VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

8.

a) $3|51X \Leftrightarrow X \in\{0, 3, 6, 9\}$; stejně pro čísla 15X, 21X, 30X, 4X5, 81X;

$3|6X1 \Leftrightarrow X \in\{2, 5, 8\}$; stejně pro čísla 34X, X52, 5X5, 91X, 4X0, 13X, X04, 1X3, 1X0

$3|2X6 \Leftrightarrow X \in\{1, 4, 7\}$; stejně pro čísla 71X, 17X, 7X1, 23X, 5X0, X14, 2X0, 20X, 1X1

b) Ani jedno z čísel 4X5, 5X5, 1X3, 7X1, 1X1, 6X1 není dělitelné číslem 6; čísla jsou lichá.

$6|51X \Leftrightarrow X \in\{0, 6\}$; stejně pro čísla 15X, 21X, 30X, 81X

$6|13X \Leftrightarrow X \in\{2, 8\}$; stejně pro čísla 34X, 91X

$6|X52 \Leftrightarrow X \in\{2, 5, 8\}$; stejně pro čísla 4X0, X04, 1X0

$6|2X6 \Leftrightarrow X \in\{1, 4, 7\}$; stejně pro čísla 5X0, X14, 2X0

$6|71X \Leftrightarrow X = 4$; stejně pro čísla 17X, 23X, 20X

c) Čísla 4X5 a 81X jsou dělitelná 9, právě když $X \in\{0, 9\}$;
čísla 71X, 17X, 7X1 a 2X6 jsou dělitelná 9, právě když X = 1;
čísla 34X, X52 a 6X1 jsou dělitelná 9, právě když X = 2;
čísla 15X a 51X jsou dělitelná 9, právě když X = 3;
čísla 23X, 5X0 a X14 jsou dělitelná 9, právě když X = 4;
čísla 4X0, 13X, X04 a 1X3 jsou dělitelná 9, právě když X = 5;
čísla 21X a 30X jsou dělitelná 9, právě když X = 6;
čísla 20X, 2X0 a 1X1 jsou dělitelná 9, právě když X = 7;
čísla 5X5, 91X a 1X0 jsou dělitelná 9, právě když X = 8.

9. $A + B = 6 \Rightarrow 3|(A + B) \Rightarrow 3|AB$; je-li $A + B = 7$, nebo $A + B = 8$, pak AB není dělitelné 6.

10. Číslo $AB - A - B = 10A + B - A - B = 9A$ je dělitelné 9, tedy i 3. Případy b) až e) jsou podobné. Ukážeme až f).
Číslo $ABCD = 1000A + 100B + 10\,C + D - A - B - C - D = 999A + 99B + 9C = 9(111A + 11B + C)$ je dělitelné 9, tedy i 3.

11. Žáci s pomocí učitele formulují kritérium dělitelnosti devíti:
$\forall\ n \in \mathbf{N}$: $9|n \Leftrightarrow 9|CS(n)$.
Stejně pro číslo 3. I když obecný důkaz je zatím nad jejich síly, podstatu důkazu znají – poznali ji na případech čísel menších než 10 000.

12. Hledané kritérium zní: $\forall\ n \in \mathbf{N}$: $6|n \Leftrightarrow (2|n$ a současně $3|n)$.

Důkaz implikace ($\Rightarrow$): Platí $2|6$, tedy z $6|n$ plyne, že $2|n$; stejně tak pro číslo 3.

Důkaz implikace ($\Leftarrow$): Ze vztahu $3|n$ plyne, že n můžeme psát ve tvaru $n = 3k$, $k \in \mathbf{N}$. Ze vztahu $2|3k$ plyne, že k je sudé, tedy můžeme je psát $k = 2t$. Odtud $n = 6t$.

✂ ✂

Komentář

Ukázka diskuse třídy jako účinného edukačního nástroje

„Je součet dvou lichých čísel pokaždé číslo sudé?“ Tuto otázku položil Martin (druhák) sestře Báře (sedmačka) a ta ji přinesla do třídy. Následovala diskuse třídy.

V hranatých závorkách je přibližné hodnocení úrovně žáka; [1] – slabší, [2] – dobrý, [3] – výborný.

Adam [1]: „Ukážu mu to na příkladech. Například 5 + 3 = 8.“

Bára [2]: „To jsem udělala. On řekl, že v malých číslech to platí, ale neví, zda to platí i pro tisíce a miliony.“

Cyril [3]: „Ukážu mu, že liché číslo se dá psát $2n + 1$. Pak vezmu dvě taková lichá čísla $2n + 1$ a $2m + 1$ a sečtu je. Dostanu $2n + 2m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1)$, a to je sudé číslo.“

Čeněk [1]: „Já ti nerozumím. A to ti má ten druhák rozumět?“

Dana [2]: „Jak vlastně druhák chápe sudé číslo? A jak liché?“

U.: „Skvělá otázka. Jak druhák chápe sudé a liché číslo? A vůbec, jak to chápeme my?“

Padlo několik názorů a následující čtyři zasluhují zaznamenání.

Eva [2]: „Z hromady bonbonů odebírám po dvou. Když nakonec zůstane na hromadě jeden bonbon, byl jich lichý počet. Když nezůstane nic, byl jich sudý počet.“