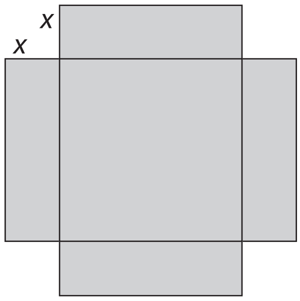
VÝSTUPNÍ ÚLOHA: **KRABICE**

Ze čtverce o straně 42 cm vystřihneme čtyři čtvercové růžky o straně x cm, jak je naznačeno na obrázku. Pak ohnutím čtyř obdélníků vytvoříme krabici. Objem této krabice označíme V(x).



a) Zjisti, zda je možné najít x tak, aby objem V(x) byl větší než 5 a půl litru.

b) Podobnou úlohu řeš pro čtverec se stranou 54 cm. Jakou největší hodnotu může objem V(x) nabýt? Jaké je v tom případě x?

c) Podobnou úlohu řeš pro čtverec o straně 60 cm. Jakou největší hodnotu může objem V(x) nabýt? Jaké je v tom případě x?

✂ ---------- ↓ PŘED KOPÍROVÁNÍM PRO ŽÁKY OD TOHOTO MÍSTA ZAKRÝT ↓ ---------- ✂

ŘEŠENÍ

a) Funkce objemu je $V(x) = (42 - 2x)^2 \cdot x$. Funkci zapíšeme do tabulky:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V[x]	1 600	2 888	3 888	4 624	5 120	5 400	5 488	5 408	5 184	4 840	4 400

Vidíme, že maximum 5 488 cm^3 = 5,488 l nastává pro $x = 7$. Je to méně než 5,5 litru. Ale není vyloučeno, že pro $x = 7{,}1$, nebo $x = 6{,}9$ to bude více než uvedených 5,5 l. Výpočet ukáže, že tomu tak není: V(6,9) = 5 487,156 a V(7,1) = 5 487,164. Hodnota V(x) klesá, když od čísla $x = 7$ jdeme dolů nebo nahoru.

b) Strana čtverce je 54 cm. Postupujeme jako u případu a). U funkce $V(x) = (54 - 2x)^2 \cdot x$ se omezíme na méně hodnot x, protože čekáme podobný průběh funkce jako v případě a).

x	7	8	9	10	11
V[x]	11 200	11 552	11 664	11 560	11 264

Vidíme, že maximum 11 664 cm^3 nastává pro $x = 9$. V obou případech je hledaná hodnota x rovna šestině strany výchozího čtverce. Toto pozorování prověříme na následujícím případu.

c) Strana čtverce je 60 cm. Šestina této délky je 10 cm. Tedy čekáme, že maximum funkce $V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x$ nastane pro $x = 10$. Výpočet tuto hypotézu potvrdí: V(9) = 15 876, V(10) = 16 000, V(11) = 15 884.

Dodejme, že označíme-li stranu výchozího čtverce a, je $V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$. Podle našeho (nedokázaného, ale pravdivého) zjištění maximum objemu V(x) nastává pro $x = a/6$. Je to $V(a/6) = 2 \cdot (a/3)^3$.

Komentář

Optimalizační úlohy patří z hlediska aplikace matematiky k nejdůležitějším. Objevují se jak v diskrétních prostředích (zde úlohy 4 a 5), tak ve spojitých prostředích, kde silným nástrojem jejich řešení je diferenciální počet. Na úrovni žáků druhého stupně ZŠ je hlavním nástrojem tabulka. Vyplňováním tabulky si žák uvědomuje průběh funkce – kde je rostoucí, kde klesající, kde má extrém – a poznává charakter funkce.

✂ -------------------- ✂