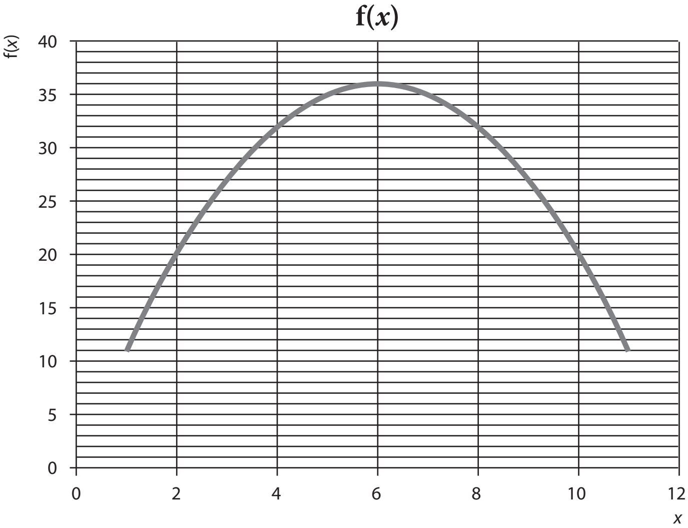
VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ

1. Označme $x = |MN|$. Pak $|KN| = |NP| = 12 - x$.

a) Obvod obdélníku $MNPQ$ je $2 \cdot (|MN| + |NP|) = 24$. To je konstanta, tedy na umístění bodu N nezáleží.

b) Obsah obdélníku $MNPQ$ je $|MN| \cdot |NP| = (12 - x) \cdot x$. Funkce $f(x) = (12 - x) \cdot x$ nabývá maxima pro $x = 6$. Žáci to najdou tabulkou:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	11	20	27	32	35	36	35	32	27	20	11



Na grafu funkce $f(x)$ je vidět její parabolický průběh. To nás utvrzuje v přesvědčení, že od vrcholu [6, 36] funkce f „do obou stran klesá". Přesný důkaz získáme pomocí substituce $x = t + 6$. Pak je $(12 - x) \cdot x = (6 - t) \cdot (6 + t) = 36 - t^2$ a toto číslo je největší, když $t = 0$.

2. Označme $x = |MN|$, $y = |QM|$. Z podobnosti trojúhelníků LQP a LMK je $\frac{(6 - y)}{x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Tedy $3x + 4y = 24$ a $x = 8 - \frac{4y}{3}$.

a) Obvod obdélníku $MNPQ$ je $o = 2 \cdot (x + y) = 16 - \frac{2y}{3}$. Protože $y > 0$, nemá tato funkce maximum. Může být libovolně blízko k číslu 16, ale tuto hodnotu nedosáhne, protože to by obdélník $MNPQ$ degeneroval na úsečku. Žáci vidí důležitý příklad funkce, která má supremum, ale nemá maximum.

b) Tabulkou, podobně jako u úlohy 1, žáci zjistí, že maximum funkce $f(x) = x \cdot (6 - \frac{3x}{4})$ nastává pro $x = 4$, $y = 3$. Opět tedy N je středem odvěsny MK, P je středem přepony KL a Q je středem odvěsny ML.

3. Nechť S je střed úsečky KL. Z Pythagorovy věty nebo měřením žáci najdou velikost výšky MS trojúhelníka KLM: $|MS| = 12$ cm. Označme $x = |PQ|$, $y = |PN|$. Z podobnosti trojúhelníků MSL a RQL máme $x = 10 - \frac{5y}{6}$.

a) Obvod obdélníku $NPQR$ je $o = 2(x + y) = 20 + \frac{y}{3}$. Protože $y < 12$, je $o < 24$ cm. Funkce $o(y) = 20 + \frac{y}{3}$ tedy nemá maximum.

b) Opět tabulkou žáci zjistí, že maximum funkce obsahu $f(x) = x \cdot (12 - \frac{6x}{5})$ nastává pro $x = 5$. Tedy N je střed úsečky KM a R je střed úsečky LM.

4. a), b) Doplněné vzdálenosti jsou v horní pravé (podbarvené) části přiložené tabulky.

c) Povodeň vyřadila cesty AB a CF.

d) Nová tabulka vzdáleností redukované sítě cest je v dolní levé (nepodbarvené) části přiložené tabulky. Tak vzdálenost mezi A a B se z původních 11 km prodloužila na 25 km a cesta z C do G se z původních 26 km prodloužila na 32 km.

A	11	13	15	30	27	39
25	***B***	12	24	29	18	30
13	12	***C***	12	17	14	26
15	24	12	***D***	16	26	31
30	29	17	16	***E***	23	15
43	18	30	39	23	***F***	12
45	30	32	31	15	12	***G***

5. a) Je zřejmé, že číslice 7 a 9 musí být na místech A a C. Žáci zjistí, že $73 \cdot 91 = 6\,643$ a $71 \cdot 93 = 6\,603$. Tedy A = 7, B = 3, C = 9, D = 1 je jedno řešení. Druhé řešení je symetrické: A = 9, B = 1, C = 7, D = 3.

b) AB – BC + CD – DA = 10A + B – (10B + C) + 10C + D – (10D + A) = 9(A + C – B – D). Toto číslo je největší, když {A, C} = {7, 9} a {B, D} = {1, 3}. Hodnota tohoto čísla je 108.