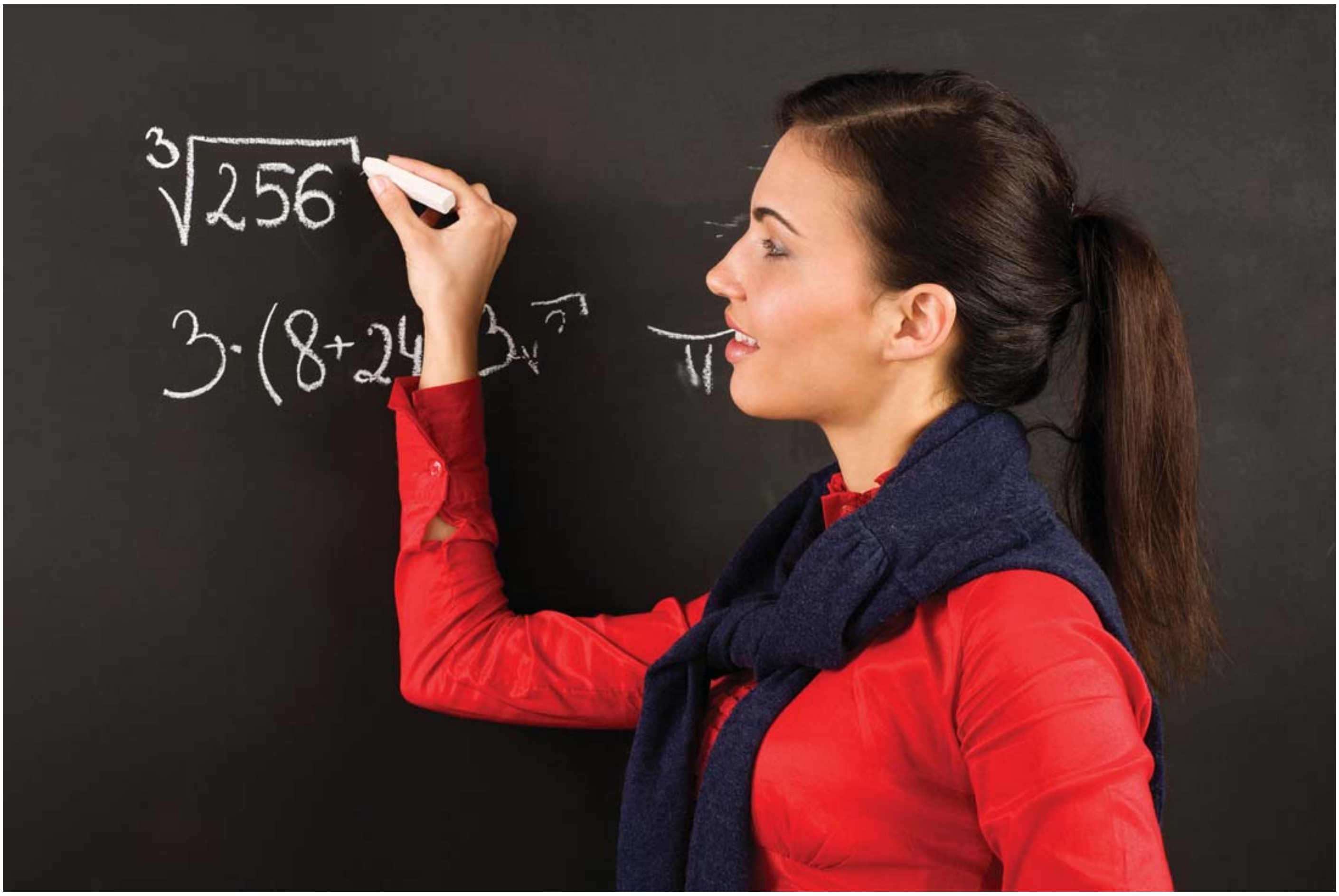
Mezinárodní šetření

TALIS 2013



Zkušenosti s využitím inovativní metody vzdělávání učitelů matematiky

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ČŠI Česká školní inspekce

Mezinárodní šetření TALIS 2013

Zkušenosti s využitím inovativní metody
vzdělávání učitelů matematiky

Jana Cachová
Jana Coufalová
Alena Hošpesová
Magdalena Krátká
Naďa Vondrová

Praha 2015

Tato publikace byla vydána jako plánovaný výstup projektu Kompetence III
spolufinancovaného Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

ISBN 978-80-88087-04-5

Obsah

Úvodní slovo

Česká školní inspekce jako partner Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy realizuje také důležité mezinárodní šetření o vyučování a učení – TALIS. Jedním z výsledků šetření TALIS 2013 bylo zjištění, že čeští učitelé se málo zapojují do některých forem profesního vzdělávání. Důvodem může být i nedostatek příležitostí. Například pouze cca 15 % českých učitelů (oproti 30 % učitelů v rámci průměru TALIS) zlepšuje své kompetence tím, že provádí individuální nebo skupinový výzkum. Tato forma vzdělávání je v některých zemích velmi oblíbena a v matematice je hojně využívána například v Japonsku pod názvem „lesson study“. Tato forma podpory učitelů je zároveň prezentována jako příklad dobré praxe i v řadě dokumentů mezinárodních institucí.

Právě vzdělávací aktivity typu tzv. lesson study začala Česká školní inspekce v rámci realizace projektu Kompetence III pilotně ověřovat i v České republice. Od listopadu 2014 do října 2015 vzniklo několik týmů složených z didaktika – odborníka z vysoké školy – a několika učitelů základní školy. Přestože je TALIS zaměřen na stupeň vzdělání ISCED 2, pilotní ověřování bylo provedeno také s učiteli prvního stupně ZŠ. Do některých skupinek byli zapojeni i studenti učitelství.

Skupinka učitelů připravila ve spolupráci s didaktikem vyučovací hodinu, kterou jeden nebo více z učitelů následně skutečně odučil v reálné třídě. Tato hodina byla natočena na video a s nahrávkou skupina dále pracovala (analyzovala hodinu, reflektovala výuku apod.). Na základě reflexe pak byla příprava na vyučovací hodinu upravena do podoby metodického materiálu, který mohou využít i další učitelé.

Výstupem tohoto pilotního ověřování je tato zpráva, která se snaží popsat zkušenosti s využitím zajímavé a inovativní metody vzdělávání učitelů matematiky v rámci převzetí zahraničního příkladu dobré praxe a jeho úpravy pro podmínky práce v českých školách. Zároveň vzniklo několik natočených vyučovacích hodin matematiky, které jsou upraveny pro případné další využití (nahrávka je umístěna jako tzv. videohospitace na portále www. rvp.cz).

Na tomto místě bych rád poděkoval kolegyním – didaktičkám z vysokých škol – a také kolegyním a kolegům z řad učitelů, kteří se do tohoto projektu zapojili. Z jejich hodnocení lze dovozovat, že šlo o vzájemně prospěšnou a užitečnou činnost, kterou obě strany vnímaly jako přínosnou. Zároveň věřím, že výstupy projektu v podobě reflexe zkušeností s touto inovativní metodou postavené na příkladech reálných českých učitelů a konkrétních škol mohou dobře posloužit jako inspirace pro ostatní.

Mgr. Tomáš Zatloukal
ústřední školní inspektor

1 ÚVOD

„Lesson study“ je jedna z forem dalšího vzdělávání učitelů, která má své počátky v Japonsku[1] a v současnosti se rozvíjí i v jiných zemích světa (viz např. Hart, Alston, Murata, eds., 2011). Stručně řečeno, učitelé ve vzájemné spolupráci (a často s podporou didaktika z univerzity) vyberou téma, kterému se budou chtít věnovat, a společně připraví jeho výuku. Do velkých podrobností naplánují jednu nebo více hodin, přičemž zvažují i rizika své přípravy. Následně jeden z nich (nebo více) tuto přípravu odučí. Ostatní učitelé jsou zpravidla na hodině přítomni a provádějí strukturované pozorování. Hodina se také natáčí na videokameru. To všem zúčastněným umožní následnou hlubší reflexi výuky. Na společných setkáních učitelé postupně vypracují zprávu z celého cyklu „lesson study“, která obsahuje upravenou přípravu, metodická doporučení, reflexi implementace hodiny apod. Tato zpráva je pak k dispozici ostatním učitelům.

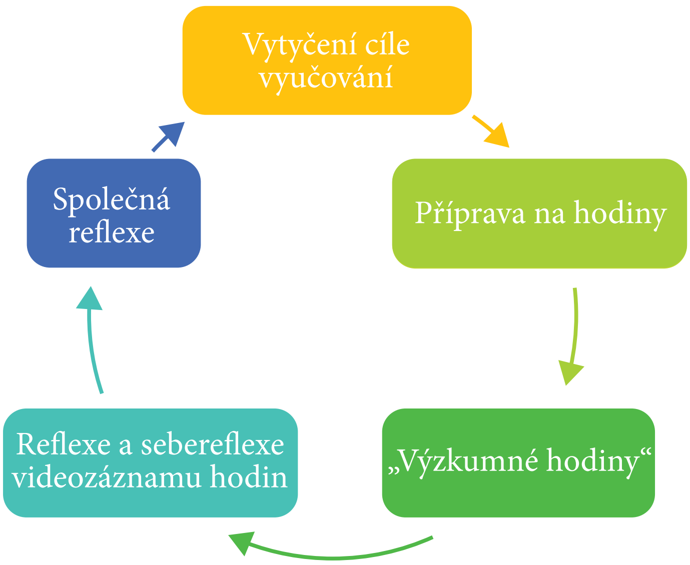
„Lesson study“ tedy poskytuje učitelům možnost učit se hlouběji porozumět výuce pomocí spolupráce s jinými učiteli, v rámci níž se zabývají jak matematikou, tak způsoby výuky a snahou porozumět, jak se žáci učí a jak uvažují. Jedna z forem „lesson study“ byla v rámci aktivit České školní inspekce pilotně ověřována i v České republice. Bylo vytvořeno pět týmů učitelů, které byly zaštítěny oborovými didaktiky z pěti různých univerzit (viz tab. 1.1). Tyto týmy společně pracovaly v průběhu roku 2015 na jednom cyklu „lesson study“, jehož jednotlivá stadia budou na následujících stránkách stručně popsána.

	Univerzita	Zúčastněné školy	Stupeň školy
Tým JCa (kap. 2)	Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta	ZŠ a MŠ Pohádka, Mandysova, Hradec Králové ZŠ Staňkova, Pardubice ZŠ Opatovice n. Labem	1.
Tým AH (kap. 3)	Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta	Základní škola Plešivec, Český Krumlov	1.
Tým MK (kap. 4)	Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta	ZŠ E. Krásnohorské, Ústí n. L. Gymnázium a SOŠ dr. V. Šmejkala, Ústí n. L.	2.
Tým NV (kap. 5)	Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta	ZŠ Táborská, Praha 4 ZŠ Ostrovní, Praha 1 ZŠ Ratibořická, Praha 9	2.
Tým JCo (kap. 6)	Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická	Masarykova základní škola Horní Bříza	2.

TABULKA 1.1: TÝMY V „LESSON STUDY“

Přehledné schéma japonské „lesson study“ je na obr. 1.1.

[1] Původní termín v japonštině je „jugyo kenkyu“ a doslova znamená studium hodiny. Počátky „lesson study“ sahají až do roku 1890 a byla inspirována samotnými učiteli z praxe. V současném Japonsku se tento způsob vzdělávání učitelů využívá jak u učitelů z praxe, tak i v přípravě budoucích učitelů.



OBR. 1.1: SCHÉMA „LESSON STUDY“ (MODIFIKACE PODLE FUJII, 2015)

1.1 Ladění týmu a získání prvních reflektivních dovedností

Cílem první fáze projektu bylo nalézt učitele ze stejného stupně školy, kteří by měli zájem se „lesson study“ zúčastnit, a sestavit z nich funkční tým. Tím je myšlen tým, jehož členové si navzájem důvěřují, jsou ochotni sdílet své zkušenosti s výukou a zejména jsou schopni efektivně spolupracovat. K tomu sloužily nejen společné schůzky, ale také reflektivní úkoly, které učitelé plnili prostřednictvím prostředí Moodle. Učitelům byl nabídnut videozáznam hodiny matematiky (nebo její části), s nímž měly relevantní akademické instituce bohaté zkušenosti z přípravy budoucích učitelů 1. stupně a učitelů matematiky a u nějž se vědělo, že dokáže vyvolat živé diskuse. Videozáznam byl doplněn několika otázkami. Ty byly buď poměrně široké („Co vám na hodině připadalo důležité?“), nebo se týkaly konkrétních situací, k nimž v hodině došlo („Jak učitelka reagovala na návrhy žáků? Popište příklad nevyužité učební příležitosti, k níž v hodině došlo.“); učitelé je měli reflektovat. Na otázky učitelé odpovídali formou diskuse přímo v prostředí Moodle, což jim umožnilo reagovat i na názory jejich kolegů z jiných škol (ukázka části takové diskuse v Moodle je na obr. 1.2). S nimi se do kontaktu dostali i prostřednictvím úkolů, které plnili v rámci tzv. workshopu. Poté, co do Moodle zapsali své názory na zhlédnutou hodinu, jim systém nabídl ke zhlédnutí, co o stejné hodině napsali někteří z dalších učitelů, a mohli na to reagovat. Příklad je na obr. 1.3. Tím začalo docházet i k (zatím virtuálnímu) propojování týmů ze všech univerzit. K některým nahrávkám se učitelé vyjadřovali i v živých diskusích při společných schůzkách nebo si měli přečíst odborný text, který nějakým způsobem s hodinou souvisel (viz seznam literatury).

Zkušenosti jasně ukazují na velkou důležitost této fáze, a to proto, aby tým učitelů fungoval skutečně jako jeden celek. Učitelé plnili úkoly, které pociťovali jako smysluplné, a vyjadřovali se k tomu, co znají nejlépe, tedy k výuce matematiky. Současně tím získávali zprostředkované zkušenosti s výukou a seznamovali se s pedagogickým přesvědčením a stylem výuky ostatních členů týmu. Tím, že měli k některým videonahrávkám číst odborné texty, pociťovali jejich relevanci pro svou práci, a tak se u nich nenásilně propojovala teorie s praxí. V neposlední řadě se rozvíjely jejich reflektivní dovednosti – podle svých slov si více uvědomovali, čeho si mají v hodině všímat a co vše má na úspěšnost výuky vliv. Přínos tohoto období není zřejmý ihned, ale učitelé z něj čerpali následně při přípravě a reflexi vlastní experimentální výuky.

První otázka k hodině
autor Naďa Vondrová - Saturday, 15. August 2015, 16.20

Učitel v sebereflexi zmiňoval, že není spokojen se způsobem kladení otázek. Neklade je adresně, ale kamsi „do třídy" a nečeká vždy důsledně na odpověď. Jaký na to máte názor vy?

Upravit | Odstranit | Odpovědět

Re: První otázka k hodině
autor Eva Holá - Tuesday, 25. August 2015, 20.54

Myslím, že úloha s velkým vápnem je natolik specifická, že nebylo možno klást otázky adresně. Věřím, že slečny ve třídě by se nechytaly, ale při společné diskuzi, která vznikla neadresním pokládáním otázek, nakonec všichni úlohu pochopili a věděli, co mají počítat. Možná bych úlohu ještě doplnila tím, že bych po třídě rozestavila hráče (tabule = branka a např. 4 hráči v různých pozicích) - ale prostorové podmínky třídy to asi úplně neumožňují. Hezká by byla třeba úloha - postav se tak, abys měl/a největší šanci se trefit do branky.

Ukázat předchůdce | Upravit | Oddělit | Odstranit | Odpovědět

Re: První otázka k hodině
autor Patricie Svobodová - Tuesday, 25. August 2015, 22.14

No přiznám se, že někdy taky kladu otázky neadresně do třídy a jsem vděčná za jakoukoliv odpověď. Ale pokud nasměřujete otázku přímo na nějakého žáka, tak další koukají co řekne a vnímají lépe.

OBR. 1.2: UKÁZKA DISKUSE OHLEDNĚ JEDNÉ Z EXPERIMENTÁLNÍCH HODIN MEZI UČITELI Z RŮZNÝCH TÝMŮ

Hodnotící formulář

Hledisko 1

Nyní máte možnost vidět, jak stejné videoukázky vidí vaše kolegyně a kolegové. Překvapilo vás něco? Vidíte to jinak? Vřele souhlasíte? Napište to. Později uvidíte i komentáře ostatních k vašim reflexím.

Známka 9 / 10

Komentář 1) Souhlasím s rozborem ukázky kolegyní. Naše názory se liší pouze v otázce zařazení aktivity do výuky - já bych ji prosazoval (i přesto, že je vhodná/pochopitelná zejména pro schopnější žáky).
2) Ve většině bodů se shodujeme. Oba jako největší problém vidíme neposkytnutí času žákům na samostatnou přípravu/řešení.
3) Shodujeme se zejména ve zbytečně velkém podílu práce učitele.
4) Ve většině názorů se shodujeme. Já jsem navíc postřehl chybu v zápisu rozboru.
5) Paní kolegyně zdůraznila (a já s ní souhlasím) vhodnou motivaci pro řešení úkolu (úloha teoreticky použitelná v reálné situaci).
6) Naše názory se výrazně neliší. Paní kolegyně zdůrazňuje možnost zařazení úkolu v případě "stíhání plánu učiva". Já bych ji využil zejména pro schopnější žáky.

OBR. 1.3: PŘÍKLAD KOMENTOVÁNÍ NÁZORŮ JINÝCH UČITELŮ NA ZHLÉDNUTOU HODINU

Spontánně vznikly týmy různého charakteru. Na jedné straně to byl tým čtyř učitelů z jedné základní školy (tým JCo), na straně druhé tým ze tří různých škol (tým NV) a na straně třetí tým učitelů doplněný studenty učitelství (tým JCa). Všechny formy se osvědčily a mají své přínosy i rizika. Nejdůležitější je, aby učitelé byli se skladbou svého týmu srozuměni (např. aby jim nevadila přítomnost studentů nebo aby učitelé ze základní školy a z osmiletého gymnázia našli společnou řeč – to byl příklad týmu MK). Učitelé se vesměs vyjadřovali, že vnímali možnost podívat se do jiné školy a na práci jiného učitele jako výrazně pozitivní. Stejně pozitivně učitelé přijímali i přítomnost studentů v týmu – jejich pohled, ještě nezatížený jistou rutinou učitelské praxe, se jim jevil jako zdroj nových nápadů.

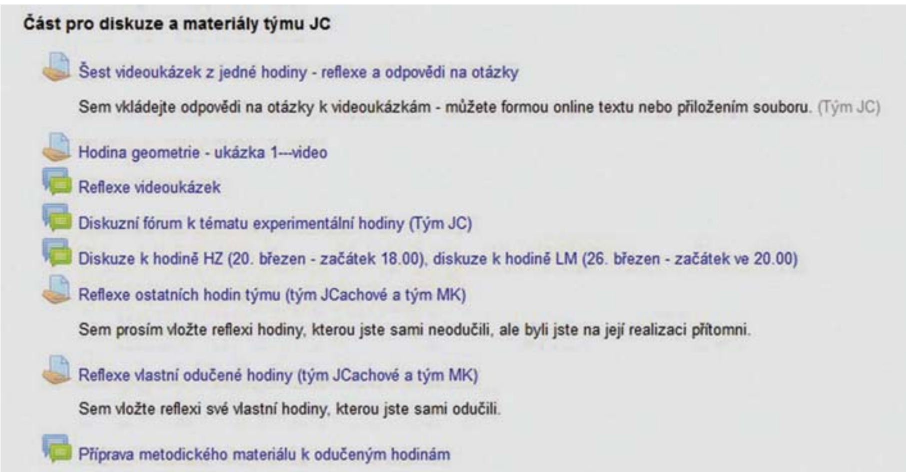
1.2 Výběr tématu a volba výukového přístupu

Současně s diskusemi uvedenými v předchozím bodu se týmy věnovaly výběru tématu, na které se budou v rámci „lesson study“ zaměřovat. Přitom vycházely zejména ze školních vzdělávacích programů zúčastněných škol, z toho, jaké ročníky daný školní rok učily, a konečně i z vlastního zájmu. Témata, která byla nakonec vybrána, budou zřejmá z dalších kapitol této publikace. Šlo jak o obsahová témata (např. přímá a nepřímá úměrnost), tak o témata zastřešující (např. modelování).

Po výběru tématu se učitelé věnovali studiu literatury. Šlo zejména o učebnice matematiky a texty k tématu, které doporučila oborová didaktička. Ty se týkaly nejen vybraného obsahu, ale také např. konstruktivistických přístupů k výuce matematiky, podnětné výuky, badatelsky orientovaného vyučování apod. (viz seznam literatury). Teoretická příprava vedla k diskusím ohledně přístupu, který tým zvolí při zpracování zvoleného tématu. Šlo vesměs o přístupy zdůrazňující aktivní přístup žáka k získávání poznatků, ať už to bylo způsobeno teoretickými poznatky z literatury či vlastním pedagogickým přesvědčením učitelů.

1.3 Příprava experimentální výuky

Následující fáze práce, příprava experimentální výuky, byla poměrně dlouhá. Týmy připravovaly jak jednotlivé hodiny, tak série hodin (viz další kapitoly). Příprava sestávala nejen z výběru vhodných úloh pro žáky, ale také z poměrně detailního popisu, jak budou úlohy implementovány, jaké asi budou reakce žáků a jak na ně má učitel reagovat, jaké jsou možné obtíže a jak s nimi má učitel naložit. Příprava vznikala ve vzájemné spolupráci učitelů, k čemuž byl rovněž využit společný prostor na Moodle (viz ukázka na obr. 1.4). Nezřídka se stalo, že po pečlivém zvážení úlohy byla vybrána úloha jiná, která se učitelům jevila jako vhodnější. Velkou pozornost věnovaly týmy také diskusi o celkové struktuře hodiny. Učitelé si uvědomili, že koncipovat argumenty podloženou výuku není nic jednoduchého, a i když nelze předpokládat, že v budoucnu budou takto pečlivě připravovat všechny své hodiny, minimálně získali představu o tom, co vše je pro pečlivé plánování potřeba.



OBR. 1.4: UKÁZKA STRUKTURY SPOLEČNÉHO PROSTORU JEDNOHO Z TÝMŮ V MOODLE

Přínosy byly přirozeně i na straně vedoucích týmů. Didaktičky se při přípravě držely spíše v pozadí a byly připraveny pomoci radou nebo doporučením literatury. Diskuse s učiteli však významně obohatila jejich didakticko-matematické znalosti a dostalo se jim zpětné vazby pro některé vyučovací techniky zdůrazňující vlastní aktivitu žáků.

Studentky zapojené do přípravy experimentální hodiny ocenily, že mohly být součástí tohoto dění a sledovat, co vše je zapotřebí pro sestavení fungující přípravy a jaké aspekty zvažují učitelé na základě svých zkušeností z praxe. Na druhou stranu studentky mnohdy podpořily myšlenku více se spolehnout na vlastní kreativitu žáků, upozorňovaly učitele na to, že mohou ustoupit do pozadí a dát více prostoru aktivitě žáků.

1.4 Realizace experimentální výuky

Experimentální hodiny byly realizovány v rámci běžné výuky matematiky v souladu s tematickými plány školy. Všechny hodiny byly pro vnitřní potřeby týmů nahrávány na videokameru (některé z hodin jsou k dispozici i širší odborné veřejnosti). Zpravidla se povedlo realizovat experimentální výuku ve více třídách (viz kapitoly níže) s tím, že po prvním provedení učitelé reflektovali silné a slabé stránky hodiny a uzpůsobili přípravu pro další kolo. Tím se práce v projektu přibližovala akčnímu výzkumu (Nezvalová, 2003).

Realizace experimentálních hodin musela být připravena i z hlediska technického. V dotčených třídách probíhalo cvičné nahrávání, aby si žáci zvykli na videokameru a chovali se při vlastní výuce přirozeně jako v ostatních hodinách. Hodiny byly nahrávány na jednu až tři videokamery (zpravidla statické). Jejich záznam není sice profesionální, pro potřeby reflexe výuky však plně postačuje. Přítomnost profesionálního kameramana pohybujícího se po třídě by výuku narušila více.

Pokud to bylo možné, byli na experimentálních hodinách přítomni i další učitelé daného týmu. To jim umožnilo získat bezprostřední dojem z hodiny a jejich terénní poznámky vedly k prvním reflexím výuky. Často se i podařilo bezprostředně po hodině zorganizovat improvizovanou schůzku týmu, na které učitelé hodinu zhodnotili. Učitelé si tak mohli ověřit rozdílnost reflektování hodiny bez videozáznamu a s ním.

1.5 Reflexe experimentální výuky

Důležitým rysem „lesson study" je fakt, že realizací experimentální hodiny celý proces nekončí. Následuje hluboká reflexe hodin na základě videozáznamů. Učitelé se k hodině vrátili prostřednictvím videozáznamů a individuálně ji analyzovali z hlediska splnění cílů, které jejich příprava měla plnit. Na společných schůzkách své analýzy diskutovali a poskytli i učiteli, který hodinu realizoval, zpětnou vazbu. Na tomto místě je opět nutné zdůraznit, jak důležitá byla první fáze „ladění" týmu. Ta vytvořila pro učitele bezpečné prostředí, v jehož rámci mohli reflektovat i věci, které se při realizaci výuky nepovedly. Navíc společná příprava rozložila zodpovědnost za případný neúspěch výuky mezi všechny členy týmu.

Bylo možné pozorovat, jak se učitelé postupně učí dívat se na hodinu nejen z hlediska toho, co se povedlo či nepovedlo, ale také z hlediska mnohem skrytějších jevů, jako je klima třídy, reakce učitele na podněty žáků, nevyužité učební příležitosti apod. To považujeme za důkaz toho, že u učitelů došlo k postupnému zvyšování citlivosti vůči vnímání didakticko-matematických jevů v hodině matematiky, u některých i k posunu v pedagogickém přesvědčení, což můžeme považovat za známky profesionálního růstu.

Nahrávání své vlastní hodiny na videokameru učitelé vesměs reflektovali jako pozitivní, ačkoli připouštěli, že jim zpočátku nějakou dobu trvalo, než se odhodlali na sebe podívat. Většinou konstatovali, že je taková zpětná vazba pro učitele přínosem, že by každý učitel čas od času měl některou ze svých hodin pro své potřeby nahrát a mít možnost se prostřednictvím sebereflexe z vlastní videonahrávky poučit.

V rámci projektu se podařilo zrealizovat i určité reflexe mezi jednotlivými týmy. Učitelé vybrali jednu ze svých hodin a připravili k nim dvě otázky (např. „Mohl učitel reagovat jinak?", „Zhodnoťte učitelovu práci s chybou."), které byly položeny ostatním týmům prostřednictvím prostředí Moodle. Forma diskuse k oběma otázkám opět umožnila vzájemné diskuse mezi učiteli. I z těch bylo patrné, že učitelé se neobávají kritických poznámek a návrhů alternativ a že učitelé, kteří hodiny učili, umí s touto kritikou pracovat.

Navíc učitelé pozitivně hodnotili, že měli možnost podívat se i na výsledek práce jiných týmů, porovnat si jejich zkušenosti z projektu se svými, sledovat, jaká témata si ostatní týmy vybraly pro společnou reflexi, které otázky byly pro ně zásadní a důležité apod.

1.6 Společné zhodnocení

V závěru bylo také provedeno společné setkání zástupců všech týmů, které vzešlo přímo z iniciativy jednotlivých učitelů. Ti se chtěli poznat s ostatními učiteli, s nimiž diskutovali na Moodle, a chtěli se podělit o svou zkušenost s výukou a prací v projektu.

Setkání mělo dvě základní části. V první z nich jednotlivé týmy představily a popsaly způsob, jakým v projektu pracovaly, ve druhé se pracovalo přímo s videozáznamy experimentálních hodin (některé z nich viděli učitelé předem, před vlastním setkáním). Učitelé vybrali důležité úryvky z hodin, které ukázali ostatním a k nimž položili otázky. O nich se pak v plénu diskutovalo. Učitelé tak získali další vhled do toho, co stálo v pozadí experimentálních hodin.

Zkušenosti z diskusí, které během setkání probíhaly, ukázaly, že setkání všech týmů má v projektu „lesson study“ své důležité místo. Společné setkání učitelům naznačuje, že ačkoli pracují v průběhu projektu v malém týmu, což by možná mohlo navodit dojem, že je taková práce ojedinělá a možná i z pohledů ostatních nezapojených kolegů na škole trošku zbytečná, nejsou ve svém počínání vůbec osamoceni. Na společném setkání se naopak zcela jasně ukazuje, že je dobré se podobnou činností zabývat a že společná týmová reflexe vlastní přípravy na hodinu i její realizace jsou pro učitele možná větším přínosem než různé formy dalšího vzdělávání.

1.7 Závěrečné shrnutí

V průběhu projektu sepisovaly týmy své zkušenosti s experimentální výukou a výsledkem je tato publikace. Úvodní kapitolu zpracovaly autorky uvedené v tiráži celého materiálu, jednotlivé kapitoly zpracovali členové příslušných týmů s tím, že dostávali zpětnou vazbu od jiných týmů. Proto také není tento dokument popsán zcela jednotným a unifikovaným způsobem.

V předchozích oddílech bylo ukázáno, že všechny prezentované fáze práce mají v „lesson study“ své nezastupitelné místo. Učitelům byl položen dotaz, zda se domnívají, že by tým učitelů mohl stejně dobře fungovat i bez odborného vedení didaktiků.[2] Učitelé se však vyjádřili jednoznačně negativně. Zdůrazňovali, že přítomnost didaktika byla nutná pro stmelení týmu, pro fázi plánování, kdy přinášel cenné vhledy (nejen) z odborné literatury, a zejména pak pro fázi reflexe jednotlivých hodin. Učitelé se domnívali, že by jejich hodnocení hodiny zůstalo spíše na úrovni „povedlo se, nepovedlo se“, pokud by jim didaktik postupně nenabízel i jiná kritéria hodnocení.

Všichni učitelé hodnotili aktivitu „lesson study“ pozitivně, subjektivně ji vnímali jako užitečnou a smysluplnou. Vyjadřovali své předsevzetí pokračovat alespoň v některých činnostech, jako jsou vzájemné hospitace a spolupráce při přípravě výuky nebo sebereflexe na základě videozáznamu vlastní výuky.

V následujících kapitolách bude představena práce jednotlivých týmů. Kapitoly 2 a 3 se týkají týmů učitelů 1. stupně, kapitoly 4 až 6 týmů učitelů 2. stupně. Všechny kapitoly mají podobnou strukturu. Nejdříve je uvedeno složení týmu, popsán výběr témat pro experimentální hodiny a uvedeny kurikulární souvislosti. Jádrem kapitol je popis přípravy experimentálních hodin spolu s jejich cíli (z hlediska znalostí a dovedností žáků), předpokládanými aktivitami učitele a žáka a přirozeně také formulací úloh. Nakonec jsou uvedeny podstatné skutečnosti, zajímavé jevy, k nimž došlo při praktické realizaci hodin.

Publikace jako celek je shrnutím zkušeností s inovativní metodou dalšího vzdělávání učitelů. Na konkrétních příkladech českých učitelů ukazuje možnosti práce s novými metodami výuky a formami dalšího vzdělávání učitelů a nabízí konkrétní reflexe zkušeností z pilotního ověřování konceptu „lesson study“ v českém prostředí. Publikace by se měla stát inspirací zejména pro učitele, dále pro tvůrce programů a kurzů dalšího vzdělání pedagogických pracovníků a v neposlední řadě pro tvůrce vzdělávacích politik a všech, kterým záleží na průběžném zkvalitňování výuky matematiky jako stěžejního předmětu národního kurikula a zvyšování kompetencí učitelů, kteří výuku matematiky ve školách realizují.

---

[2] Formát „lesson study“ může být různý. V týmu mohou být jen učitelé, nebo tam může být i pracovník z univerzity jako v našem případě, nebo v něm může být kromě učitelů i vyškolený učitel, metodik apod.

2 POZNÁVÁNÍ VLASTNOSTÍ ÚTVARŮ V ROVINĚ PROSTŘEDNICTVÍM MANIPULATIVNÍCH ČINNOSTÍ

V této kapitole bude představena práce týmu 1. stupně z Hradce Králové. V rámci něho spolupracovaly:

- Jana Cachová (Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, katedra matematiky),
- učitelky Martina Králíková (ZŠ Opatovice nad Labem; MK), Lenka Mikešová (ZŠ a MŠ Pohádka, Hradec Králové), Hana Zábranská (ZŠ Staňkova, Pardubice; HZ),
- studentky učitelství pro primární vzdělávání PdF UHK Kristýna Honzíčková a Lucie Zavřelová.

2.1 Výběr tématu

Při výběru vhodného společného tématu experimentálních hodin tým vycházel z toho, že je zapotřebí zvolit takové téma, které bude propojovat učivo obou třetích tříd s učivem čtvrtého ročníku. Ukázalo se, že to nebude nijak jednoduché. Mezi třetím a čtvrtým ročníkem je po obsahové stránce velký rozdíl, stačí si uvědomit, že podle RVP ZV spadá třetí ročník do 1. období očekávaných výstupů, kdežto čtvrtý ročník až do 2. období. Protože každá třída pocházela z jiné školy, jejich ŠVP se vzájemně lišily. Navíc 4. ročník pracoval s učebnicemi M. Hejného. Uvedené důvody vedly tým k tomu, aby se soustředil při výběru zastřešujícího tématu spíše než na ŠVP na konkrétněji zaměřené třídní tematické plány. Podrobně tedy členky týmu prostudovaly tematické plány všech tří tříd na měsíce březen až květen, protože právě v tomto období se měla ve školách uskutečnit realizace experimentálních hodin. Učitelky z daného týmu se dohodly, že každá zrealizuje jednu hodinu s tím, že hodiny ve třetích ročnících budou probíhat podle jednotného scénáře a pro čtvrtý ročník bude příprava poupravena, aby odpovídala obsahu jeho učiva.

Na základě vzájemného srovnání jednotlivých tematických plánů bylo zvoleno téma z geometrie. Oba třetí ročníky čekalo v nadcházejícím období porovnávání úseček, čtvrtý ročník pak manipulativní činnosti v geometrii. Proto se tým rozhodl, že se bude podrobněji zabývat útvary v rovině (ve třetích ročnících úsečkami, ve čtvrtém ročníku manipulativními činnostmi ve čtvercové síti; za zkoumaný rovinný útvar pro čtvrtý ročník byl zvolen trojúhelník – žáci se s ním teprve seznamovali, zatím ještě neměli zkušenosti s hlubším poznáváním jeho vlastností). V záloze pak byla možnost využití dalších témat, v úvahu přicházely slovní úlohy, případně závislosti a práce s daty. Nakonec byly jako zastřešující téma zvoleny manipulativní činnosti v rovině.

Téma *Poznávání vlastností útvarů v rovině prostřednictvím manipulativních činností* je založeno na manipulativních činnostech žáka. Členky týmu byly přesvědčeny, že manipulativní činnosti ve vyučování matematice hrají v primárním vzdělávání důležitou a nezastupitelnou roli. Prostřednictvím těchto činností žák poznává jednotlivé objekty, seznamuje se s jejich vlastnostmi a také dostává příležitost zkoumat jejich vzájemné vztahy. Tým se rozhodl pro téma z geometrie, protože to pro jeho členy byla částečně výzva. Zdaleka ne všichni učitelé 1. stupně geometrii a s ní spojená geometrická témata kladně přijímají, nebo je dokonce vítají. Často naopak výuku geometrických témat provázejí obavy a nedůvěra ze strany učitele. Tyto postoje se pak mohou přenášet na žáky. Někteří z nich se k těmto tématům staví pasivně a negativně, dokonce z nich mají strach. Členky týmu ale věřily, že právě geometrie má velký potenciál nabízet žákům dostatek vhodných a podnětných úloh, být zdrojem pro hravé činnosti, rozvíjet zájem žáka o její vyučování a podněcovat jeho vlastní aktivitu.

Učitelky HZ a MK se ve svých třetích ročnících rozhodly věnovat podtématu *Úsečky – měření a porovnávání délek*, LM se svojí čtvrtou třídou *trojúhelníkům a měření jejich obsahu*.

2.2 Záležitosti kurikula a hledání základního přístupu k tématu

Zvolené téma je v souladu s RVP ZV (2013), podle kterého žák v 1. období „porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky“, ve druhém pak „určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu". Do učiva k tomuto tématu podle RVP ZV spadají: základní útvary v rovině – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník; délka úsečky; jednotky délky a jejich převody; obvod a obsah obrazce.

Také podle M. Kupčákové (2015), která se v současné době podílí na rozpracovávání geometrické části standardů z matematiky, je zapotřebí poskytnout žákům vhodné problémové úlohy, řešené prostřednictvím manipulativních činností:

> V poslední čtvrtině 20. století se prosadil mylný názor, že lze „vhodně a věku přiměřeně" budovat axiomatický systém planimetrie od mladšího školního věku. Už od 2. třídy byly zaváděny abstraktní pojmy, nepřiměřené symboly, zápisy, odborná terminologie atd. Tato koncepce se však prokázala jako nevhodná a neúčinná. […] Na základní školu žák přichází s geometrickými představami, které většinou získal právě v konkrétním reálném světě. Během vzdělávání na základní škole by pak měl získat další základní geometrické znalosti, dovednosti a návyky. […] Manipulativní činnosti, úzce spojené právě s reálným světem, mají za cíl přivést žáka k objevování vlastností objektů geometrického světa a vztahů mezi nimi. […] Úlohy jsou pak s věkem žáků problémově odstupňovány.

Při koncipování přípravy experimentálních hodin vycházely členky týmu z toho, že je zapotřebí pojmout vybrané téma podnětně, a to buď jako téma obsahové, které by se věnovalo zavádění nové látky, nebo jako téma dovednostní, tedy zaměřené na rozvíjení konkrétních řešitelských dovedností. Vzhledem k charakteru zvoleného tématu a skutečnosti, že členky týmu pracují s žáky mladšího školního věku, byla zvolena druhá možnost, a sice postavit hodinu na aktivním řešení podnětných úloh žáky ve dvojicích nebo ve skupinách.

Aby byl dodržen požadavek odučit stejné téma více učiteli, postavily členky týmu hodinu právě na problémových úlohách, které se jak pro třetí, tak pro čtvrtý ročník vázaly ke stejnému podnětnému prostředí, ale obsahově se lišily podle zvoleného podtématu pro daný ročník. Konkrétně se jednalo o úlohy na geoboardu[3] (vyznačování zadaných útvarů pomocí gumiček), úlohy ve čtvercové síti (krokování v síti podle šipkového zápisu) a úlohy s dřívky (určení počtu podobných útvarů v obrazci). Poslední z těchto úloh byla sice původně připravena jak pro třetí, tak i pro čtvrtý ročník, nakonec se ale vzhledem k podrobné prezentaci řešení druhé úlohy jednotlivými skupinami v hodině nerealizovala. Učitelky se navíc rozhodly zapojit do vyučování činnostní reprezentace (ve třetí třídě modelování úseček a bodů pomocí provázku a kolíčků v úvodní části hodiny, ve čtvrté třídě modelování daného typu trojúhelníku pomocí provázku v rámci závěrečné prezentace jednotlivých skupin).

2.3 Formulace cílů

Za dlouhodobý cíl experimentálních hodin tohoto týmu bylo stanoveno poznávání vlastností útvarů v rovině. Tento cíl splňovaly jak hodiny ve třetích třídách, tak hodina ve čtvrtém ročníku. Je zřejmé, že je možné tento cíl hlouběji rozvíjet dalšími hodinami podobného charakteru, které by na tyto hodiny navazovaly či jim předcházely. Například je možné, že někteří učitelé po seznámení s přípravami experimentálních hodin provedenými členkami týmu zrealizují hodinu, která bude mít stejný dlouhodobý cíl, tedy poznávání útvarů v rovině, využijí k tomu i stejné zastřešující téma (manipulativní činnosti), stejná prostředí (geodesky i čtvercovou síť), ale budou se věnovat jiným rovinným útvarům, popř. jiným vlastnostem, než kterým se konkrétně věnoval tento tým. V jeho dvou případech se jednalo o tyto konkrétní cíle – měření délek úseček ve čtvercové síti a měření obsahu trojúhelníků ve čtvercové síti.

V přípravě experimentálních hodin se samozřejmě odrážela zkušenost učitelů z jejich školní praxe, jejich vztah k matematice a jejímu vyučování a v neposlední řadě přístup, který v jejich učitelské práci převládá. Vzájemné diskuse nad přípravou společných hodin byly ale ovlivněny i studiem videozáznamů hodin,

[3] V textu je pro geoboard užíván termín geodeska. Jedná se o různě velkou desku, na níž jsou např. pomocí kolíčků vyznačeny body tvořící čtvercovou mříž. Na kolíčky se natahují gumičky, a tím se modelují různé rovinné útvary.

na základě kterých se učitelky učily hodiny reflektovat v první části projektu, a četbou doporučené odborné literatury.

V této skupině se navíc projevil praxí nezatížený pohled studentek, které se snažily ovlivnit učitelky z praxe, zdůrazňující někde spíše aktivní roli učitele, v tom smyslu, že je možné více spoléhat na aktivitu žáka a důvěřovat jeho poznávacím a objevitelským schopnostem.

Je samozřejmé, že ačkoli učitelé experimentální hodiny společně připravili, jejich vlastní realizace se potom určitým způsobem navzájem odlišovala právě vlivem jejich osobního pedagogického přesvědčení a jimi preferovaného přístupu k vyučování.

2.4 Stručný popis celého procesu v rámci týmu

Učitelé k přípravě experimentálních hodin přistupovali odpovědně, i když při prvním setkání členek týmu nad společnou přípravou považovali hned první z návrhů průběhu hodiny za hotový. Stalo se tak nejspíš pod vlivem běžné přípravy na každodenní výuku ve školní praxi. Většinou jsou tak učitelé zvyklí z praxe školy, kde jedna hodina střídá druhou a učitel musí v rychlém sledu reagovat. Vyučování je v těchto případech chápáno jako proces, a pokud se něco nepovede, existuje možnost to další hodinu opravit.

Příprava experimentální hodiny však měla poněkud jiný charakter, učitelé poznali, že je možné o přípravě hodiny diskutovat s kolegy a že v průběhu přípravy se právě v rámci diskuse projeví různé zkušenosti s podobnými činnostmi a situacemi, které je možné v přípravě využít. Uviděli, že se dají různá hlediska zvažovat dopředu, například možnosti řešení a možné odpovědi žáků.

2.5 Konkrétní plán a realizace hodiny

Nejdříve je popsána podrobná příprava pro obě experimentální hodiny – pro 3. ročník (příprava byla realizována ve dvou třídách různých škol) a pro 4. ročník (realizovaná na jiné škole, než jsou obě 3. třídy).

Tabulka shrnující přípravu a realizaci hodin je uvedena na s. 16 a 18.

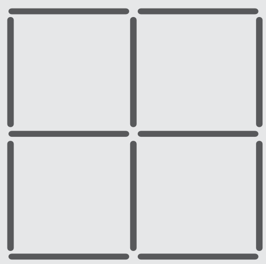
2.6 Popis realizace

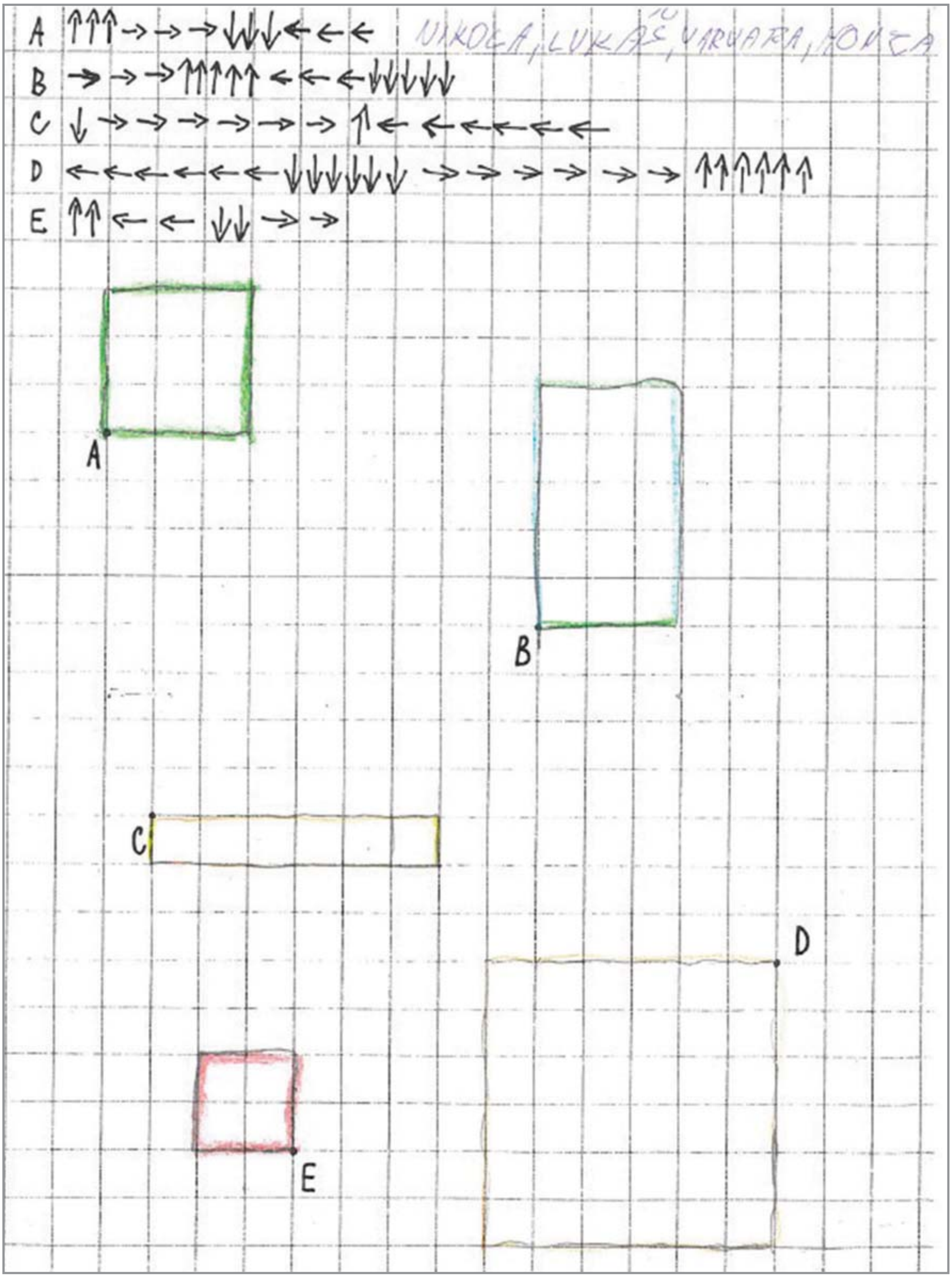
V realizaci jednotlivých hodin každé z učitelek daného týmu se výrazně projevily její přednosti. V jedné hodině bylo například jasně vidět, že je třída navyklá na skupinovou práci, že jsou žáci uvnitř skupiny zvyklí spolupracovat a že jsou systematicky vedeni k tomu, aby práce uvnitř skupiny nenarušovala činnosti ostatních skupin.

V další třídě se zase projevil fakt, že žáci jsou vedeni k objevitelskému přístupu, jsou zvyklí řešit problémové úlohy a samostatně (v rámci skupiny či dvojice) na ně hledat odpovědi. V jiné třídě naopak dobře fungovala motivace dramatizací apod.

Prostředí geoboardu bylo pro učitele nové. Během společného sezení nad přípravou experimentální hodiny ze situace vyplynulo, že by se čtvercová síť, se kterou učitelé chtěli pracovat, mohla doplnit prostředím geoboardu. Chybějící zkušenosti s geoboardem u učitelek se projevila v tom, že se jim nedařilo přesně dopředu odhadnout reakce žáků na předložené úlohy.

Téma:	**Poznávání vlastností útvarů v rovině prostřednictvím manipulativních činností – úsečky, určeno pro 3. ročník**
Cíl:	Žáci se naučí měřit délky úseček ve čtvercové síti
Realizace:	HZ – ZŠ Pardubice, Staňkova, 20. 3. 2015 MK – ZŠ Opatovice n. Labem, 9. 4. 2015

	Aktivita (úloha, otázka)	**Role učitele a žáků**
1	**Úvod** **Geometrické divadlo**	Žáci navazují na znalosti o bodu a o úsečce z 2. ročníku. Žáci stojí na koberci a podle toho, jak se odvíjí děj, se postupně zapojují. Vyučující drží jeden konec provázku, druhý konec připevní např. zavřeným oknem. Učitel hru řídí a zadává úkoly. Ti, kteří nehrají, dohlížejí na správnost. Př.: „Na přímé čáře leží bod M jako Maruška a N jako Nelinka.“
2	**Práce s geodeskou** Pomůcky: *geodeska 5 × 5, asi 12 ks – do dvojic nebo i pro jednotlivce, různě barevné gumičky různých velikostí*	Práce ve dvojicích v lavicích. Nejprve zadává úkoly učitel. Př.: „Vezmi žlutou gumičku a znázorni na geodesce úsečku dlouhou dvě jednotky.“ „Vezmi modrou gumičku a vyznač na geodesce úsečku, která je delší než žlutá.“ Pak si žáci zadávají úkoly navzájem ve dvojicích. Následuje ukončení práce s geodeskou a úklid pomůcek.
3	**Čtvercová síť a krokování ve čtvercové síti** *Práce ve skupinách (šest skupin po 3–4 žácích)* *Pracovní listy s šipkovými zápisy (čtvercová síť s jednotkovým čtvercem 1 × 1 cm)*	Každá skupina dostane pracovní list s šipkovým zápisem (viz obr. 2.1). Výsledkem budou různě velké čtverce nebo obdélníky, zanesené do čtvercové sítě na pracovním listu. Žáci porovnávají délky úseček, stejně dlouhé úsečky obtahují stejnou barvou. Každá skupina může prezentovat své výsledky. Poté vyvodíme základní vlastnosti těchto čtyřúhelníků.
4	**Kolik je na obrázku čtverců?** *Samostatná práce se zápalkami (párátky)*	Každý žák dostane na pracovním listě zadání: „Čtverce na obrázku jsou sestaveny z 12 zápalek. Jaké dvě zápalky musíme odstranit, aby zůstaly pouze dva čtverce?“  Kontrola se provede společně na interaktivní tabuli. Můžeme barevně vyznačit hledané obrazce.
5	**Závěrečné zhodnocení**	



OBR. 2.1: UKÁZKA VYPLNĚNÉHO PRACOVNÍHO LISTU Z 3. ROČNÍKU

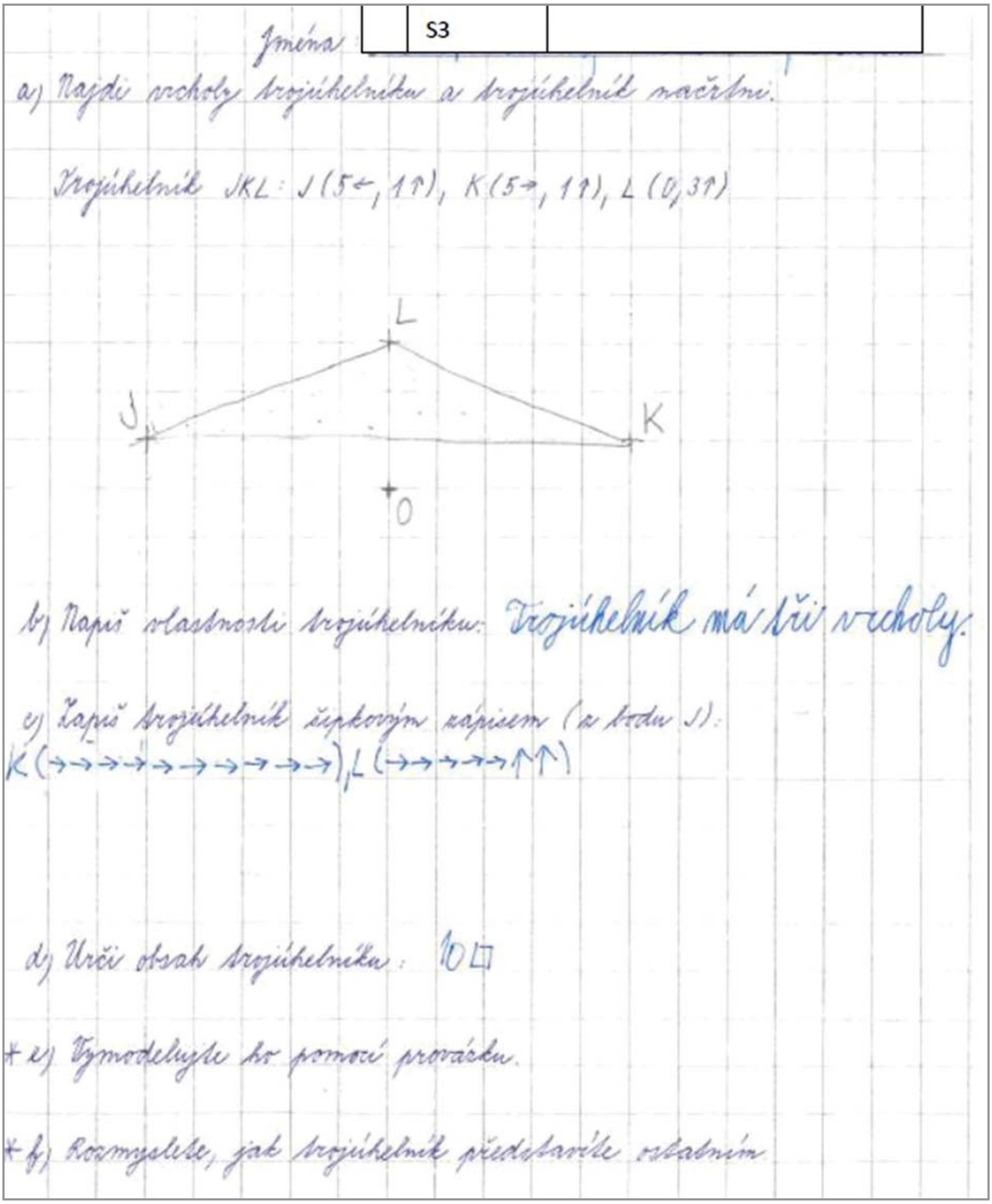
Téma:	**Poznávání vlastností útvarů v rovině prostřednictvím manipulativních činností – trojúhelníky pro 4. ročník**
Cíl:	Měření obsahu trojúhelníku ve čtvercové síti
Realizace:	LM – ZŠ a MŠ Pohádka, Hradec Králové, 26. 3. 2015

	Aktivita (úloha, otázka)	Role učitele a žáků
1	**Úvod, cíl hodiny**	Učitel přivítá žáky a řekne, co se bude v hodině dělat.
2	**Práce s geodeskou** Pomůcky: *geodeska 5 × 5, asi 12 ks – do dvojic nebo i pro jednotlivce, různě barevné gumičky různých velikostí*	Každý žák na desce pracuje samostatně, žáci se ve dvojici v práci střídají. Žáci mají samostatně vyvodit, jaké geometrické útvary mohou na geodesce pomocí gumiček nalézt. Od druhého úkolu dvojice řeší úlohu společně, žáci se ve dvojici domlouvají, spolupracují. Úkoly: „Vypněte na geodesce jednu gumičku tak, aby se nekřížila.“ „Pomocí dvou gumiček vytvořte trojúhelník, uvnitř něho čtverec.“ „Vypněte na geodesce co největší trojúhelník, ve kterém bude co největší čtverec (stále pomocí dvou gumiček). Je více řešení? Jaké obsahy může mít utvořený čtverec?“ „Vypněte na desce čtyři trojúhelníky, které mají jeden společný vrchol. Je více řešení?“ „Zadávejte si úlohy na geodesce navzájem ve dvojici, v zadávání úloh se postupně prostřídejte.“ Následuje ukončení práce s geodeskou a úklid pomůcek.
3	**Čtvercová síť a krokování ve čtvercové síti** *Práce ve skupinách. Šest skupin (2–4 žáci), pracovní listy se souřadnicovými zápisy různých trojúhelníků (viz obr. 2.2)*	Skupiny pracují samostatně, své zadání neukazují jiné skupině. Výsledkem bude 6 různých trojúhelníků, to ale žáci dopředu nevědí. Úkoly: „Nejprve se podepište, společně projdeme zadání postupně po jednotlivých řádcích: načrtnout trojúhelník do čtvercové sítě, popsat jeho vlastnosti, zapsat jej šipkovým zápisem, určit jeho obsah; pro rychlejší žáky: znázornit pomocí provázku, promyslet prezentaci.“
4	**Prezentace jednotlivých skupinek**	Využíváme vizualizéru.
5	**Závěrečné zhodnocení**	

2.7 Závěr

Pro tento tým bylo velkým přínosem i závěrečné společné setkání s ostatními týmy zapojenými do projektu „lesson study“. Právě z toho důvodu, že členky týmu byly každá z jiné školy, zůstávaly stále v rámci své školy s projektem „lesson study“ osamocené, ačkoli poznaly, že spolupráce v týmu funguje. Závěrečné zasedání jim dalo možnost vidět, že i další týmy mají podobné zkušenosti s výukou i s prací v rámci projektu, že tato spolupráce mezi učiteli funguje ve více případech a v různých formách, tudíž je možné v budoucnu zkusit zapojit do podobné spolupráce i kolegy na škole.

Studentky zapojené do tohoto týmu ocenily projekt jako pozitivní zkušenost se školní praxí, kdy se mohly přímo podílet na přípravě hodiny a zároveň pak sledovat její různá provedení.



Jména | | S3 |

a) Najdi vrcholy trojúhelníku a trojúhelník načrtni.

Trojúhelník JKL: J(5←, 1↑), K(5→, 1↑), L(0, 3↑)

b) Napiš vlastnosti trojúhelníku: Trojúhelník má tři vrcholy.

c) Zapiš trojúhelník šipkovým zápisem (z bodu J).

K(→→→→→→→→→→), L(→→→→→↑↑)

d) Urči obsah trojúhelníku: 10 □

+ e) Vymodelujte ho pomocí provázku.

+ f) Rozmyslete, jak trojúhelník představíte ostatním

OBR. 2.2: UKÁZKA VYPLNĚNÉHO PRACOVNÍHO LISTU ZE 4. ROČNÍKU

3 ALGORITMY PÍSEMNÉHO SČÍTÁNÍ A DĚLENÍ SE ZBYTKEM

V jihočeském týmu 1. stupně spolupracovaly:

- Alena Hošpesová (Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, katedra pedagogiky a psychologie)
- Hana Kaboňová, Martina Kalivodová, Bohunka Neumannová (Základní škola Plešivec, Český Krumlov)

Spolupráce jihočeského týmu respektovala schéma japonské „lesson study" (viz obr. 1.1) a modifikovala je na podmínky jihočeského týmu. Nejprve byl na společném setkání do hloubky prodiskutován cíl hodiny. Členky týmu vycházely z toho, co se v daném ročníku v daném období učí a co považují učitelky za podstatné. Byl formulován cíl vyučovací hodiny v jazyce výkonu žáka. V následujícím období (cca 14 dní) jednotlivé členky týmu promýšlely možné cesty ke splnění stanoveného cíle. Na společném setkání každá členka týmu představila a vysvětlila své náměty. V diskusi členky týmu hledaly slabiny a výhody jednotlivých přístupů. Poté se učitelky samostatně připravily na „výzkumné hodiny". Hodiny byly realizovány ve stejný den v obou třídách a natočeny na video. Po zpracování videozáznamu měla každá z členek týmu možnost obě hodiny zhlédnout a formulovat své postřehy. Tyto postřehy pak byly prodiskutovány na společném setkání. Po tomto setkání ještě každá členka týmu zpracovala písemnou reflexi.

3.1 Výběr tématu

Experimentální vyučování probíhalo ve dvou třetích třídách. Ve společné diskusi se členky týmu shodly na tom, že důležitým tématem v tomto období je pochopení algoritmů písemného sčítání a odčítání. Význam tohoto učiva není v současnosti spojen s používáním algoritmů pro řešení úloh v praxi. Výuka by se měla zaměřovat na pochopení toho, jak algoritmy fungují a jaké vlastnosti operací jsou při nich využívány, neboli měla by vést k prohloubení pochopení operací. Je známo, že se většinou ve škole zaměřujeme na to, abychom písemně počítali rychle a bez chyby, což má díky dostupným kalkulačkám velmi malý praktický význam. Pochopení algoritmu se většinou nevěnuje téměř žádná pozornost.

Členky týmu původně předpokládaly, že po zkušenostech s vyvozením algoritmu písemného sčítání obdobně zpracují hodinu o písemném odčítání. Po natočení první hodiny však potřebovaly dostatečný časový odstup na individuální a společnou reflexi. V této době obě učitelky musely písemné odčítání probrat. Z tohoto důvodu bylo pro druhou hodinu vybráno téma dělení se zbytkem. Šlo o obtížné učivo, které ale žáci mohli vyvodit na základě svých předchozích i praktických zkušeností sami.

3.2 Vybrané téma v kurikulu

Vybrané téma je explicitně zmíněno v RVP ZV (2013, s. 30) mezi očekávanými výstupy 2. období 1. stupně: „Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení; provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel." Mezi závazným učivem jsou pak uvedeny (tamtéž, s. 31) „vlastnosti početních operací s přirozenými čísly; písemné algoritmy početních operací".

ŠVP ZŠ Plešivec uvádí stručně jako cílový výstup, že žák „sčítá a odčítá zpaměti i písemně". Předmět matematika jako celek má podle tohoto ŠVP přispívat k rozvíjení průřezových témat: rozvoj schopností poznávání, řešení problémů a pěstovat rozhodovací dovednosti.

3.3 Formulace cílů a přístupy k vyučování

3.3.1 Dlouhodobé cíle

Naplňování dlouhodobých cílů souvisí s vytvářením a obohacováním nadpředmětových klíčových kompetencí, jak jsou formulovány v RVP ZV (2013). Úvahy o tom, jak zpracovat experimentální hodiny, se opíraly o to, jak mohou vybrané matematické obsahy ovlivnit tyto kompetence.

Nejvýrazněji je zastoupena (jako ostatně vždy v matematice) kompetence k řešení problémů. Zde členky týmu předpokládaly, že žák bude řešit úlohy, které povedou k vnímání vztahů, zákonitostí a souvislostí. Chtěly dát žákům prostor, aby si vyzkoušeli různé postupy řešení a aby samostatně posuzovali správnost nalezeného řešení.

Zároveň bylo počítáno s pěstováním kompetence komunikativní jako důležitého předpokladu pro spolupráci s ostatními žáky, a to jak ze strany členů skupiny, ve které žák pracuje při řešení úkolu, tak ze strany ostatních spolužáků při prezentaci výsledků práce. Žáci budou muset věcně argumentovat, komunikovat při řešení úloh se spolužáky i s učitelkou, formulovat myšlenky tak, aby jim ostatní rozuměli, formulací svých myšlenek prohlubovat porozumění pojmům, vnímání vztahů a souvislostí, podstaty jevů apod. Bude požadováno, aby naslouchali ostatním při prezentaci jejich návrhů řešení.

Vytváření kompetence sociální a personální podpoří spolupráce žáků při řešení úloh ve skupinách.

Kompetence k učení („učit se učit“) je podpořena požadavkem, aby žáci znovuobjevili znalosti na základě svých praktických i školních zkušeností.

K prohloubení kompetence pracovní směřuje vytvoření pracovní atmosféry ve třídě; pasivita žáků nebude tolerována.

3.3.2 Konkrétní cíle v experimentálních hodinách

Příprava experimentálního vyučování se opírala o analýzu toho, co se má žák naučit. Při rozboru písemného sčítání se členky týmu zabývaly zejména tím, zda je možné, aby žák pravidla, podle kterých algoritmus pracuje, objevil sám. Formulováno v jazyce cílového výkonu žáka:

- Žák chápe, že při písemném sčítání zapisujeme sčítance pod sebe proto, abychom sčítali jednotky odpovídajících řádů (neboli počet jednotek jednoho sčítance s počtem jednotek druhého sčítance, počet desítek jednoho sčítance s počtem desítek druhého sčítance atd.).
- Žák si má experimentálně vyzkoušet, že můžeme počítat (a) od nejvyšších řádů i (b) od nejnižších řádů, ale počítání od nejvyšších řádů může znamenat, že bude muset výsledek přepisovat.
- Žák má vyřešit situaci, kdy součet v některém řádu je větší než 9, a pochopit, jak se taková situace zapíše.

Zejména poslední bod se stal předmětem diskuse, zda mají členky týmu už v první hodině problém s „počítáním s přechodem desítky“ řešit. Nakonec tuto situaci nechaly otevřenou a učitelky ji řešily podle svého uvážení.

Při dělení se zbytkem členky týmu za cílový výkon považovaly, že žák pochopí, že v oboru přirozených čísel lze dělit i čísla, která nejsou násobkem dělitele, a že v takovém případě vyčíslujeme zbytek. Předpokládaly také, že nechají žáky navrhnout, jak takovou situaci zapsat, a pak je seznámí se zápisem, který je používán v jejich učebnici.

3.3.3 Základní popis výukového přístupu

Do hloubky byl diskutován přístup k vyučování. Obě učitelky, které měly hodiny učit, se shodly na tom, že si vyzkouší badatelsky orientovanou výuku (BOV), která umožňuje žákům zažít proces, kterým se „tvoří znalosti v matematice osobními a kolektivními pokusy o odpovědi na otázky, které vznikají v rozmanitých oblastech“ (Artique et al., 2011, s. 10). O daném přístupu slyšely, uvítaly možnost o něm hlouběji uvažovat a prodiskutovat jej s kolegyněmi.

V přípravě na vyučování členky týmu vycházely z vymezení, které pro badatelsky orientovanou výuku navrhli Linnová, Davisová a Bell (2004, s. 4):

> Bádání je záměrný proces diagnostikování problémů, kritického experimentování a rozpoznávání alternativ, plánování bádání, zkoumání hypotéz, hledání informací, konstruování modelů, diskuse s vrstevníky a formování srozumitelných argumentů.

V souladu s Ropohlem a kol. (2013) pak tým uvažoval o činnostech, které BOV v matematice na 1. stupni ZŠ má zahrnovat:

- autentické aktivity žáků založené na řešení problému (které zpočátku mohou znamenat i zkoumání chybných cest),
- experimentování (s čísly, předměty apod.),
- formulace závěrů a jejich ověřování žáky/žákem,
- bohatá komunikace s vrstevníky a učitelkou, náznaky „vědecké diskuse“.

To znamenalo vytvořit žákům prostředí, ve kterém by byl těmto činnostem dán prostor. Členky týmu předpokládaly, že východiskem bude řešení neznámé úlohové situace, která vyvolá takové (školní nebo praktické) zkušenosti žáků, které ji pomohou řešit. Diskutovalo se, zda mají žáci pracovat ve skupinách, dvojicích nebo jednotlivě. Členky týmu se také zaměřily na to, jak organizovat závěrečnou diskusi o dosažených výsledcích, na to, jak objevené poznatky „institucionalizovat“.

3.4 Popis procesu přípravy hodin

Jako východisko *písemného sčítání* členky týmu navrhly v přípravné fázi tři varianty výchozí úlohy:

- Jak se počítá na účtenkách v obchodech?
- Jak počítáme, jestliže jsou čísla zapsána v tabulkách?
- Který z postupů, který pro výpočet použily jiné děti, je správný a proč? (viz obr. 3.4)

I u *dělení se zbytkem* byly nakonec vytvořeny tři varianty motivační úlohy:

- Rozdělte určený počet kuliček spravedlivě do důlků.
- Rozdělte spravedlivě květiny do kytic.
- Který z postupů, který pro výpočet použily jiné děti, je správný a proč? (viz obr. 3.6)

3.5 Konkrétní plán a realizace hodin

3.5.1 Příprava a realizace hodiny na vyvození písemného sčítání

Při přípravě na vyučování písemného sčítání členky týmu vycházely z toho, že žáci zpaměti sčítají dvojciferná čísla a rozumějí tomu, že se sčítají počty jednotek a počty desítek. Rozhodnutí o tom, kterou z výše uvedených variant motivační úlohy použijí a jaké bude její přesné znění, bylo ponecháno na vyučujících.

V tabulce níže je celý proces přehledně popsán. V prvním sloupci je číslo aktivity, ve druhém je její stručný název a ve třetím je plán jejího použití ve třídě. Za některými aktivitami jsou zmíněny i zkušenosti z experimentální hodiny.

<table>
<tr><th colspan="3">3.A ZŠ Plešivec Český Krumlov, vyučující Hana Kaboňová</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aktivita</th><th>Role učitele a žáků</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Úvod, cíl hodiny</td><td>Učitelka pozdraví žáky a představí hosty.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Motivační úloha</td><td>Učitelka rozdá dětem pracovní listy (viz obr. 3.1).
Motivační úloha: „Zahrajeme si na prodavače, kterému se rozbila kasa, a musel tedy účtenky psát ručně. Zapomněl zapsat součty. Vypočítejte, kolik stály nákupy, a zapište do rámečku na účtence.“
Žáci si přečtou úlohu, vypočítají součty a zapíší je do modrého rámečku na účtence.
Pozn.: Východiskem písemného počítání se měla stát znalost sčítání zpaměti. Žáci vědí, že musí sčítat jednotky s jednotkami a desítky s desítkami. To si provedením výpočtu připomenou.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Práce ve dvojicích</td><td>Učitelka vyzve k vrstevnické kontrole práce slovy: „Najděte si do dvojice kamaráda, který řešil stejnou úlohu, a zkontrolujte si výsledek. Pokud máte v modrém rámečku jiné číslo, přepočítejte to spolu.“</td></tr>
<tr><td colspan="3">Chyby v pamětném počítání se téměř nevyskytly.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Záznam, jak jsme počítali</td><td>Učitelka: „Na pracovním listě na řádky vedle paragonu zaznamenejte, jak jste počítali. Pohovořte si o svém postupu s kamarády.“
Někteří žáci předvedou na tabuli způsob svého počítání.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Potvrdil se předpoklad, že žáci sčítají nejprve desítky, pak jednotky; výsledky sečtou dohromady.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Jiný způsob počítání?</td><td>Učitelka dává prostor žákům, kteří počítali jiným způsobem.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pouze jedna dívka si sčítance přepsala pod sebe. Způsob ji naučila maminka, protože počítání vedle sebe jí nejde.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Způsob zápisu sčítanců pod sebe a počítání pod sebou</td><td>Učitelka směřuje pozornost žáků k tomu, že na účtence je výpočet zapsán pod sebou, a hledá s nimi odpověď na otázku, jak tento způsob zápisu ovlivní výpočet.
Situace by měla vyústit v odpovědi na otázky: „Jak vám to vyšlo? Máte stejný výsledek jako v modrém rámečku? Pokud ne, jak je to možné?“</td></tr>
<tr><td colspan="3">Záměrem zde bylo pracovat s chybným zápisem: na některých pracovních listech čísla nebyla pod sebou zapsána správně. Žáci ale nebyli ochotní sečíst čísla chybně, nepomohl ani pokyn, aby si „sloupečky“ naznačili tužkou a pak sčítali čísla zapsaná pod sebou (i chybně).</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Zápis příkladů se shodným výsledkem</td><td>Učitelka: „Kdo máte stejný výsledek? Pojďte svůj zápis napsat na tabuli přesně jako na vaší účtence.“
Žáci zapisují na tabuli své výpočty a vysvětlují, jak postupovali.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objevil se problém zápisu v řádech s „přechodem desítky“. Žáci navrhli způsob zápisu.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Proč to vyšlo nebo nevyšlo?</td><td>Učitelka vyzve žáky, aby ve dvojicích prodiskutovali příklady, kde sčítáním čísel pod sebou nedostali správný výsledek, a odpověděli na otázku: „Proč někdo správný výsledek má a jiný ne?“
Žáci měli svůj názor napsat do modré bubliny (obr. 3.1).</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Sdílení ve velké skupině</td><td>Žáci čtou své názory a odpovídají na položené doplňující otázky.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Metodou řízeného objevování a pokládání doplňujících otázek byla vyvozena pravidla algoritmu. Přijatá pravidla zapsala učitelka na tabuli.</td></tr>
</table>

Anička si v hračkářství koupila kuličky za 27,- Kč a samolepky za 36,- Kč. Kolik zaplatila dohromady?

Paragon s čísly	Takhle jsem počítal/a
Kuličky 27 Samolepky 36 Celkem	____________ ____________ ____________ ....

Mohl/a – nemohl/a jsem vypočítat příklad správně, protože……..

OBR. 3.1: PRACOVNÍ LIST „ÚČTENKY“ (PŘÍKLAD; ZMENŠENO)

3.C ZŠ Plešivec Český Krumlov, vyučující Martina Kalivodová	
Aktivita	**Role učitele a žáků**
1 **Rozcvička**	Učitelka dává příklady, žáci počítají zpaměti; resp. reagují na otázky. Rozcvička je zaměřená na pamětné sčítání a odčítání, násobení, dělení, procvičování sudých a lichých čísel, řadu čísel. Procvičují se čísla na místě jednotek a desítek.
Rozcvička nebyla úplně nutná, ale žáci jsou zvyklí „nastartovat se“ na hodinu matematiky.	
2 **Motivace na téma MS v biatlonu, práce ve dvojicích** *Pomůcky: lístečky se jmény biatlonistů a najetými km (obr. 3.2).*	Učitelka popisuje úlohovou situaci, která je motivována právě proběhlým MS v biatlonu. Žáci mají za úkol sečíst čísla v tabulce (km najeté při tréninku; viz obr. 3.3) jiným způsobem, než jsou zvyklí. Žáci vyplňují tabulku v pracovním listu.
Motivace je pro žáky poutavá, i když ne vždy nutná. Biatlon bylo aktuální téma. Pokyn „sečíst jiným způsobem“ nevedl žádné dítě k navržení písemného sčítání. Žáci se snažili „vyhovět zadání“ a používali závorky, rozklad, zápis jako při slovní úloze. Pouze jeden žák sčítal jednotky s jednotkami, desítky s desítkami.	
3 **Pracovní list**	Učitelka rozdává pracovní list (viz obr. 3.4, kde je pracovní list již vyplněný), žáci mají za úkol přečíst si výroky a rozhodnout o jejich správnosti. Výrok, o kterém si myslí, že je správně, mají vybarvit. Žáci ve společné diskusi komentují výroky, učitelka naslouchá, event. dává doplňující otázky a požaduje vysvětlení.
V této části hodiny žáci komentovali různé (i chybné) postupy. Učitelce se podařilo vést diskusi ke splnění cíle hodiny. Zajímavá diskuse byla u výroku 2 + 6 + 3 + 1, který někteří žáci nepovažovali za jednoznačně chybný.	

Soukalová	sobota 32 km	neděle 24 km
Vítková	sobota 23 km	neděle 27 km
Krupčík	sobota 45 km	neděle 35 km

OBR. 3.2: PROUŽKY PRO ÚLOHY „BIATLON" (PŘÍKLAD ZADÁNÍ ÚLOH)

	Soukalová	Vítková	Landová	Soukup	Moravec	Krupčík	Šlesingr	Puskarčíková
V sobotu km	32	23				45		
V neděli km	24	27				35		
Celkem km	56	50				80		

OBR. 3.3: ŘEŠENÍ ÚLOHY „BIATLON" SKUPINOU ŽÁKŮ)

OBR. 3.4: PRACOVNÍ LIST PÍSEMNÉ SČÍTÁNÍ, ŘEŠENÍ DANA

3.5.2 Příprava a realizace hodiny na vyvození dělení se zbytkem

Pro dělení se zbytkem je nutné především rozhodnout, která z možných interpretací dělení bude použita jako výchozí:

- Dělení podle obsahu (rozdělujeme určitý počet na stejné skupiny, známe velikost skupiny a hledáme, kolik skupin můžeme vytvořit),
- Rozdělování (rozdělujeme spravedlivě určitý počet, známe počet skupin, ptáme se na velikost skupiny).

České učebnice nejsou jednotné. Pro dělení se zbytkem je asi pochopitelnější vycházet z dělení podle obsahu (žáci tvoří stejně velké skupiny tak dlouho, dokud mají nějaké prvky; pokud už nemohou vytvořit skupinu, prvky jim zbudou), např. rozdělujeme 27 lahví do přepravek po šesti, kolik přepravek naplníme? Rozdělování je méně vhodné, protože při manipulaci s předměty nemusí být jasné, kdy máme rozdělování zastavit (kdy se už nedostane na každého), a může se stát, že rozdělíme všechny prvky a rozdělení není spravedlivé, např. rozdělujeme 27 bonbónů šesti dětem, 3 děti dostanou 5 bonbónů, 3 děti dostanou 4, zbytek nemáme žádný.

<table>
<tr><th colspan="3">3.A ZŠ Plešivec Český Krumlov, vyučující Hana Kaboňová</th></tr>
<tr><th colspan="2">Aktivita</th><th>Role učitele a žáků</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Úvod hodiny</td><td>Učitelka pozdraví žáky, dává organizační pokyny pro následnou práci ve skupinách, rozdává pomůcky.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Každá skupina dostala sáček na kuličky vystřižený z papíru, několik papírových koleček, která modelovala kuličky, a proužek papíru „na zavázání sáčku“ (obr. 3.5).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Hra „s kuličkami“</td><td>Učitelka zadává úkol slovy: „Rozdělte kuličky do sáčků tak, aby v nich byl stejný počet kuliček. Nerozdělujte kuličky po jedné. Rozhodněte, kolik kuliček bude v sáčku, nalepte je na obrys sáčku, zavažte (nalepte na sáček proužek papíru), pak naplňujte další sáček. Pokud to nevyjde a v důlku něco …., zapište, jak jste počítali, na cvičný papír.“
Žáci mají zjistit, kolik mají kuliček, do kolika sáčků je mají rozdělit, určit podíl.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Žáci na počátku úlohu nepochopili. Učitelka v průběhu řešení povolila žákům rozdělování kuliček prostřednictvím manipulace.
Učitelka nechtěla použít slovo „zbude“ (viz tři tečky v plánu hodiny). Chtěla naznačit, že se nejedná o standardní dělení. Předpokládala, že žáci objeví, že při spravedlivém dělení mohou nějaké prvky zbýt.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Skupinová práce</td><td>Žáci řeší, jak rozdělit kuličky na cvičném papíře.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Žáci docházejí k tomu, že není možné kuličky spravedlivě rozdělit. Vytváří se kognitivní konflikt, který nedovedou vyřešit; snad se bojí udělat chybu. Neodvažují se navrhnout, že při dělení něco zbývá. Zdá se, že čekají na hotový návod, jak situaci řešit. Někteří se jeví frustrovaní, ztrácejí motivaci.
Žáci situaci zapsali pomocí dělení, ale nebyli si jisti správností.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Rozdělování kuliček do sáčků</td><td>Žáci lepí kuličky do sáčků, podle toho, jak si to připravili na cvičném papíře.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Učitelka mění strategii, pracuje s žáky společně krok za krokem a otázkami je vede k předpokládanému závěru.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Prezentace u tabule</td><td>Žáci prezentují u tabule, jak počítali a zapisovali. Diskuse povede k použití pojmů: „zbývající kuličky v důlku“, „zbytek“. Ukáže se obvyklý zápis.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Krok za krokem pod vedením učitelky žáci zapsali výpočty a zjistili, kolik kuliček zůstalo v důlku. Pojem zbytek navrhla učitelka. Pak žáci diktovali výpočty a říkali, kolik kuliček zbylo.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Skupinová práce (dělení se zbytkem)</td><td>Učitelka zadává všem příklad: 15 : 2 = __. Pracuje celá třída frontálně pod vedením učitelky.
Učitelka předpokládá, že si žáci uvědomí, že pro výpočet používají řadu násobků (v tomto případě čísla 2) a intuitivně vnímají nejbližší nižší násobek.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Závěr</td><td>Učitelka shrne učivo, nové pojmy a postup při počítání. Pro ověření žáci samostatně vypočítají: 19 : 3 = __.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Někteří žáci příklad vypočítali sami, jiní ne.</td></tr>
</table>

OBR. 3.5: USPOŘÁDÁNÍ TŘÍDY 3.A PŘI ŘEŠENÍ ÚLOHY „KULIČKY“

3.C ZŠ Plešivec Český Krumlov, vyučující Martina Kalivodová	
Aktivita	**Role učitele a žáků**
1 **Úvod hodiny**	„Rozcvičení“ žáků opakováním řad násobků 2 a 3. Učitelka rozděluje žáky do skupin a skupinám rozděluje pomůcky.

Hodina byla zahájena obvyklým procvičováním pamětného počítání. Byly vybrány řady násobků, protože jsou při dělení se zbytkem využívány. Každá skupina dostala několik z papíru vystřižených váz a papírové květiny.

2 **Zadání motivační úlohy**	Učitelka zadává úkol slovy: „Rozdělte květiny do váz tak, aby v každé váze bylo stejně květin. Nerozdělujte květiny po jedné. Přemýšlejte, jak to udělat jinak.“

Žáci navrhují, že si květiny přepočítají. Učitelka tento postup schválí.

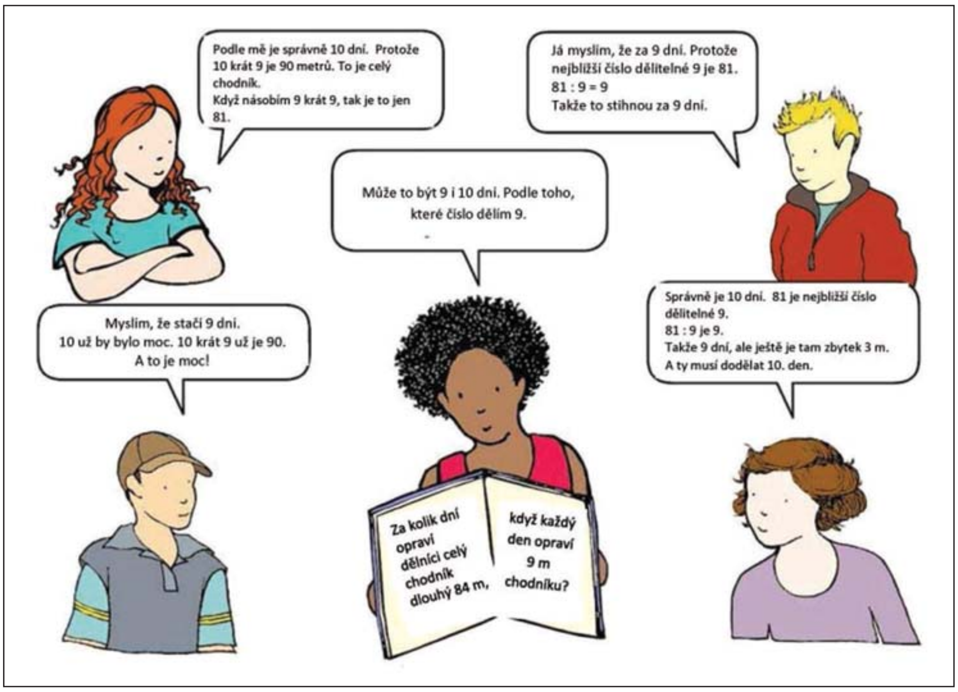
3 **Řešení úlohy ve skupinách**	Žáci ve skupinách hledají řešení úlohy. Učitelka sleduje samostatnou práci. Na závěr žáci nalepí své řešení na papír a dokreslí květinám stonky.

Většina skupin se snažila úlohu řešit výpočtem. Vycházelo jim, že květiny zbývají. To žáci nebyli schopni přijmout a opakované se snažili najít jiný výsledek. Např. někteří žáci hledali znovu v obálkách, jestli tam nezapomněli nějaký květ.
V diskusi se skupinou děvčat se učitelka v jednom momentě ptá: „Vadí, když vám něco zbude? Je to problém? Zbývající květinu nedáte do vázy. Zadáno bylo rozdělit, ale pokud zbylo….“. Návrh učitelka opakuje nahlas pro celou třídu. Učitelčiným pokynem je konflikt mezi znalostmi žáků a zadáním vyřešen. Žáci návrh přijímají.
Během další činnosti žáků ještě učitelka upřesňuje, že je nutné rozdělit co nejvíce květin.
Při dokreslování dochází v některých skupinách k postrkování, protože papír je dost malý na to, aby mohlo současně kreslit více žáků.

4 **Prezentace na tabuli**	Učitelka vyzývá žáky, aby zapsali řešení na tabuli a vysvětlili, jak počítali. Zástupci skupin postupně přistupují k tabuli a popisují činnost skupiny.

První prezentující žákyně popisuje činnost, která vedla k vyřešení úlohy, a navrhuje zápis: (21 – 1) : 4 = 5. Následující skupiny pak používají obdobný zápis.

6 **Shrnutí**
Učitelka oceňuje způsob zápisu a uvádí, jak se zapisuje dělení se zbytkem. Postupně použijí žáci tento zápis pro všechny úlohy vystavené na tabuli.
Učitelka konstatuje, že většina žáků učivo pochopila.



OBR. 3.6: PRACOVNÍ LIST DĚLENÍ SE ZBYTKEM

3.6 Shrnutí k realizaci hodin

Jak je patrné z poznámek k přípravě hodin v předchozím oddíle, bylo nutné na řadě míst zamýšlený postup modifikovat v závislosti na reakcích žáků. Dovést žáky při řízeném znovuobjevování k plánovanému cíli může být v některých případech obtížné. Osvědčilo se, když bylo připraveno více variant postupu. Jako podněcující prostředek se jevily navržené pracovní listy. Jejich forma byla inspirována „concept cartoon“, které navrhl kolektiv autorů pro přírodovědné a matematické vyučování (Dabell et al., 2008).

Je také třeba konstatovat, že takto koncipovaná výuka je náročná na čas. Ačkoli všechny vyučovací jednotky byly plánovány na 45 minut, docházelo k překročení tohoto času. Členkám týmu se zdálo, že většina žáků neztrácí pozornost a má zájem cíl hodiny splnit. V ZŠ na Plešivci to nevyvolávalo žádné organizační potíže, protože ve škole nezvoní.

Ve společné diskusi po realizaci hodin se členky týmu snažily odpovědět na otázku, co přinesl badatelsky orientovaný přístup žáků. Na tuto otázku odpovídaly spíše na základě pocitů z hodiny, nesbíraly žádná empirická data. Shodly se na tom, že není možné jednoznačné říci, že žáci lépe chápou to, co sami objeví. Na počátku řešení úloh členky týmu pozorovaly velký zájem žáků

o řešení úloh. Jak ale řešení postupovalo, pozornost některých žáků se snižovala. Zejména na konci hodiny, kde se řešila úloha „Účtenky“, byla patrná únava žáků.

Osvědčil se následující postup:

1. Řešení praktické úlohy
2. Práce ve skupinách/dvojicích
3. Prezentace práce skupin, diskuse k návrhům žáků
4. Shrnutí výsledků učitelkou

Úspěch celého postupu je závislý velkou měrou na kvalitě úlohy, kterou učitel zadá. Úloha by měla směřovat k uvedení zamýšleného matematického pojmu, početního postupu apod. a praktické zkušenosti, které žáci mají, mají potenci, podle odhadu učitele, pomoci v jejím řešení.

3.7 Závěr

V závěru lze shrnout zkušenosti z celého řešení projektu „lesson study". Všechny členky jihočeského týmu možnost spolupráce v projektu považovaly za přínosnou. Reflexe jednotlivých hodin se samozřejmě lišily podle role účastníka při přípravě a realizaci hodiny:

- Badatelka většinou sledovala, jak učitelky a žáci interpretují matematické pojmy.
- Vyučující učitelka upírala svůj zájem na výkon jednotlivých žáků a měla by zájem dostat podrobnější informace o tom, jak jednotlivci úlohy řeší, jak se podílejí na skupinové práci, jak obhajují před ostatními členy skupiny své názory. Komentáře k hodině se často týkaly příspěvku jednotlivých dětí a obsahovaly i další informace o konkrétních žácích.
- Učitelka, která hodinu neučila, ji obvykle nahlížela z pozice jiných možných variant přístupu. Navrhovala jiné reakce v problematických chvílích hodiny.

Členky týmu uvažovaly také o tom, zda je možné „lesson study" realizovat ve skupině kolegů ve škole bez podpory výzkumníka (např. didaktika z pedagogické fakulty). Tým se shodl na tom, že podpora zvenčí je velmi důležitá, i když si členky týmu uměly představit i neformální „lesson study" s oporou o videozáznam hodiny kolegy. Důležité je, aby se podařilo navodit bezpečné prostředí.

4 GONIOMETRICKÉ FUNKCE – APLIKAČNÍ ÚLOHY

Tým 2. stupně byl sestaven ze dvou učitelek ZŠ Elišky Krásnohorské v Ústí nad Labem a učitele Gymnázia dr. Václava Šmejkala v Ústí nad Labem. ZŠ E. Krásnohorské je umístěna v centru města, je považována za výběrovou školu a nabízí rozšířenou výuku jazyků. V 9. ročníku, kde probíhala experimentální výuka, byli žáci rozděleni do tříd podle studijních schopností (od této koncepce škola v dalších letech upustila). Školy jsou nedaleko od sebe, relativně snadno dopravně dostupné, což se ukázalo být významným kladem pro zdárný průběh vzájemné intenzivní spolupráce. Pozitivně členové týmu hodnotili jeho genderové složení. Učitelky také kladně hodnotily možnost spolupráce s gymnaziálním učitelem. Obě učitelky spolu sdílí kabinet a spolupracovaly na přípravě výuky již před zahájením projektu běžně. Nikdy však v takové míře a také ne s cílem sebehodnocení nebo poskytnutí zpětné vazby realizované výuky. Všichni tři učitelé mají odpovídající vzdělání (absolvovali Pedagogickou fakultu Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem) a mají za sebou 10–15 let praxe, a to právě v těch školách, ve kterých nyní vyučují.

4.1 Výběr tématu a výukových metod

Vybrané téma patří mezi nadstavbový obsah RVP ZV vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, nicméně obě školy, kde „lesson study“ probíhala, mají toto téma zařazené ve svých ŠVP v rozsahu: „Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku – goniometrické funkce jako poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku (sinus, kosinus, tangens)“, s očekávanými výstupy: „Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku; určuje velikost úhlu výpočtem; užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků; analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.“

Kritéria týmu pro výběr tématu a volbu výukových metod byla následující:

- Využití v praxi: Goniometrické funkce i trigonometrie se velmi často využívají v praxi, a tím nabízejí vhodné prostředí pro budování vazeb mezi školskou matematikou a reálným světem. Žáci si tak mohou uvědomit a představit, kde všude se dá trigonometrie využít.
- Matematizace slovní úlohy: Žáci by se měli naučit převádět slovní zadání problému do matematické formulace úlohy.
- Návodné otázky: Učení prostřednictvím řešení problémové úlohy je postavené na správném kladení otázek – učitel by měl pouze ukazovat směr a neprozradit vše, formulovat otázky správně logicky i z hlediska českého jazyka.[4]
- Přesah do jiných vyučovacích předmětů: Pokud nechce učitel zůstat pouze u počítání v abstraktních trojúhelnících, musí je najít v reálném životě. Často tak potřebuje aplikovat znalosti z různých vyučovacích předmětů nebo oblastí lidského života. Téma nabízí hezké možnosti mezipředmětových vztahů.

Téma goniometrických funkcí si tým vybral z následujících důvodů:

- Téma se časově hodilo a odpovídalo představám členů týmu o připravované hodině: Vzhledem k tomu, že členové týmu chtěli vytvořit hodinu, ve které budou velkou část hodiny pracovat žáci, nechtěli takovou hodinu, ve které by musel učitel uplatňovat příliš rozsáhlé výklady. Naopak si chtěli vyzkoušet realizovat a analyzovat takovou výuku, kde by učitel dění řídil pomocí pokynů, otázek a návodných úkolů, zároveň ale přenechal podstatnou iniciativu žákům. Nemohli tedy vybrat úvod určitého tématu. Z tohoto úhlu pohledu se volba řešení problémové úlohy jevila jako ideální.

  Při následném porovnání tematických plánů všech členů týmů jako možná témata vyšla aplikace goniometrických funkcí ve slovních úlohách, případně jejich využití při práci s tělesy (odchylky a vzdále-

[4] Pochopitelně to není specifické pouze pro vybrané téma, ale právě na tento problém jsme v týmu narazili.

nosti v tělesech). Druhé téma by však připadlo až na velmi pozdní termín a nezbýval by dostatek času na následnou analýzu a úpravu přípravy.

- Možnost vyvážené hodiny: Zvolené téma nabízí možnost vytvořit vyváženou hodinu, ve které se dá sledovat rovnoměrné rozdělení práce učitele i žáků. Žáci mohou samostatně i týmově pracovat, prezentovat výsledky své práce a učitel oproti tomu připravit, koordinovat a vyhodnocovat výukové situace.
- Téma je zajímavé: Do slovních úloh se dá snadno zakomponovat přesah do jiných částí matematiky (v tomto případě například využití Pythagorovy věty, převody jednotek, zásady zaokrouhlování, práce s trojúhelníkem) i do jiných předmětů (v tomto případě dějepis a tělesná výchova), případně i do situace z běžného života žáků.
- Úloha jako výzva pro učitele: Vybraná úloha nutí učitele ke studiu. Příprava na hodinu v tomto případě zahrnovala také rozšíření znalostí učitele, který musel být připraven nejen na otázky žáků matematického charakteru, ale také na otázky týkající se zvoleného námětu slovní úlohy – tedy fotbalu. Pro hladký průběh hodiny bylo nutné znát přesné rozměry hřiště, vědět, od čeho jsou odvozeny, znát něco málo z pravidel fotbalu, případně se naučit i potřebnou terminologii. Další výzvou bylo seznámení s programem GeoGebra a jeho následné efektivní použití v hodině.

4.2 Cíle experimentální hodiny a další kontext

Cíl hodiny: Žáci aplikují znalosti o goniometrických funkcích v pravoúhlém trojúhelníku, žáci matematizují reálnou situaci, žáci odhadují velikosti úhlů, graficky analyzují slovní zadání úlohy, hledají vhodné pravoúhlé trojúhelníky a vyjadřují velikosti úhlů pomocí goniometrických funkcí.

Pomůcky: notebook (NB), dataprojektor, GeoGebra (GG), kartičky goniometrických funkcí (GF), prezentace pro procvičení určování GF, kalkulačky, pracovní listy.

Metody a forma: Kombinace frontální a individuální práce, samostatná práce ve dvojicích s následnou žákovskou prezentací výsledků práce, metoda kladení otázek.

Předchozí předpokládané znalosti: Zaokrouhlování desetinných čísel, převody jednotek, velikosti úhlů a jejich rozdělení, operace se zlomky, obecně trojúhelník (rozdělení na typy atd.), znalosti přepony, přilehlé a protilehlé odvěsny, goniometrické funkce (umět najít v tabulkách nebo pomocí kalkulačky), umět se orientovat (rozumět zadání, vyslovit cíl řešení úlohy) ve slovních úlohách.

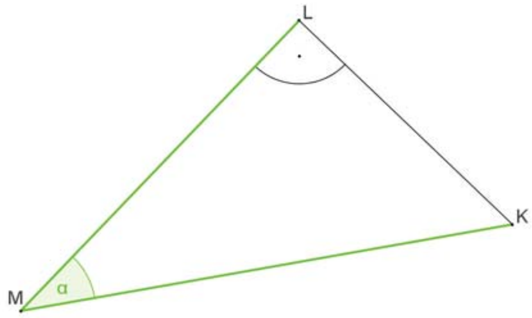
Ověřované (nově získané) znalosti: Žáci matematizují reálnou situaci, graficky analyzují slovní zadání reálné situace, formulují zadání matematické úlohy a zlepšují svůj odhad. Žáci aplikují znalosti o goniometrické funkci tangens. Žáci porovnají výsledky výpočtů se zadáním reálné situace. Žáci si prohloubí pojetí zaokrouhlování v prostředí šedesátkové soustavy. Žáci se seznámí s imperiálními jednotkami yardy a stopami a s jejich převody na jednotky SI.

4.3 Konkrétní plán a realizace hodiny

Třída: 9. ročník ZŠ, resp. kvarta VG		
	Aktivita	**Role učitele a žáků**
1	**Rozcvička (ppt prezentace)[5] s využitím kartiček GF**	Učitel slovně komentuje vizuální zadání úlohy; ověřuje správnost žákovského řešení (pomocí kartiček, kontrolních a nápovědných otázek). Žáci vyhledají na obrázku trojúhelníku pravý úhel, přeponu, odvěsny; určí správnou GF pro vyznačený úhel.

[5] Zadání úkolů v prezentaci je převážně obrázkem, který je doplněný slovním zadáním učitele. Střídají se různá pojmenování trojúhelníků a různá umístění trojúhelníku na nákresně. Dále jsou doplněna slovní (vizuální) zadání bez obrázku.

Příklad zobrazeného trojúhelníku je na obrázku.



Správnost řešení na kartičkách není snadné ve větším počtu kontrolovat, bylo by možné kartičky barevně odlišit a zároveň je vyrobit neprůsvitné, aby žáci nemohli řešení „odkoukat“.

2 **Odhad** „Filip si po fotbalovém tréninku zkouší střelbu na branku. Stojí na hranici pokutového území.[6] Které místo je pro střelbu nejvýhodnější?“	Učitel zadává úlohu, kterou současně promítá na dataprojektoru; ověřuje porozumění zadání a řídí diskusi. Žáci analyzují zadání; matematizují reálnou situaci; odhadují řešení. Pozn.: Velikosti jsou zadávány s přesností na jedno desetinné místo, a to hlavně kvůli řešení úlohy 3, kde půjde velikost některých úhlů uhádnout (úhlopříčka ve čtverci, 45°). Rozměry hřiště jsou dány v yardech (branka 8 yardů, vápno 18 yd × 44 yd), 1 yd = 0,9144 m.[7] V řešení lze rozměry v yardech používat, protože goniometrické funkce jsou vyjádřeny jako poměry stran, není důležité, v jakých jednotkách jejich velikost uvádíme, pouze je nutné používat jedinou jednotku. Hezkou poznámkou je sdělení, že „branka má rozměr 8 × 8“, jde o 8 yardů na šířku a 8 stop na výšku.[8]
3 **Diskuse** „Odkud je přímá střelba na branku nejvýhodnější[9]/nejméně výhodná? A proč? (Co to znamená, že je nejvýhodnější?)“	Učitel modeluje pohyb bodu *F* v GeoGebře. Žáci si načrtávají obrázek a umisťují bod *F* do významných bodů na hranici pokutového území. Formulují matematické znění úlohy. V rámci diskuse by mělo dojít k matematizaci reálné situace. Pozn.: Pokud žáci rovnou uhádnou, že jde o místo „naproti“ brance uprostřed, znejistíme je konstatováním, že situace by mohla být stejná na celé úsečce *TT‘* odpovídající šířce branky, protože odtud je stále stejná nejkratší vzdálenost k brance. Naopak, budou-li předpokládat, že je to kdekoli naproti brance, znejistíme je pomocí „šikmého“ kopu, a tím navedeme na střelecký úhel. (Můžeme také využít analogie s úlohou „vidím úsečku pod úhlem“.) Situaci musíme také nutně zjednodušit a uvažovat, že se kope rovný kop bez falše a po zemi. Žáci si odhad velikosti střeleckého úhlu ve významných bodech napíší – v závěru mohou porovnávat svůj odhad s vypočítanou velikostí.[10]

6 Žáci mohou znát pojem „velké vápno“ nebo také „šestnáctka“, což (nepřesně) odpovídá vzdálenosti od branky 16,5 m.

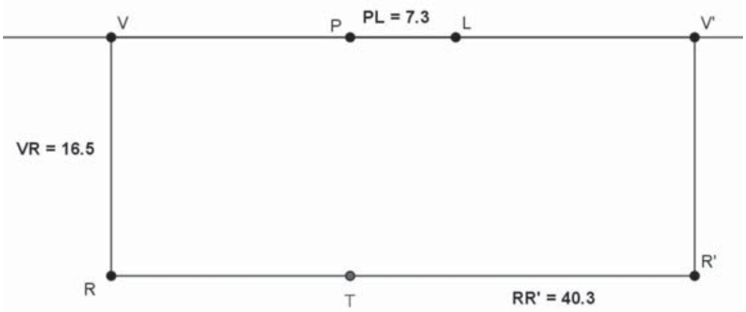
7 To podle legendy odpovídalo vzdálenosti špičky nosu a prostředníku natažené ruky anglického krále Jindřicha I. (11.–12. století).

8 Veškeré rozměry a podstatné informace o fotbalovém hřišti je možné získat na https://cs.wikipedia.org/wiki/Fotbal#1._Hrac.C3.AD_plocha

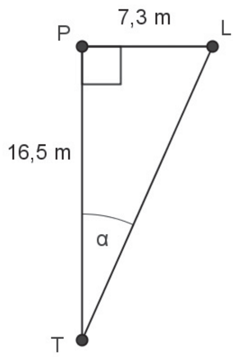
9 V průběhu diskuse se několikrát objevila formulace „největší pravděpodobnost trefení branky“. Než budete číst dál, zamyslete se nad její legitimitou. Tato nepřesnost ve vyjadřování inspirovala členy týmu k zamyšlení, zda je možné v tomto kontextu o pravděpodobnosti mluvit, zvláště s ohledem na náhodnost kopů. Budeme-li ale předpokládat, že jde o neprofesionálního fotbalistu, lze modelovat, že četnosti jeho kopů nějakým směrem (přibližně v úhlu 45°) vykazují vlastnosti normálního rozdělení s nejvyšší četností trefení doprostřed branky.

Vyústěním diskuse by měla být mimo jiné motivace pro zadání klíčových úloh.
Motivace úlohy 1: „Kde by měl Filip stát, abychom nejlépe uměli zjistit jeho střelecký úhel?“
Motivace úlohy 2: „Kde by měl Filip stát, aby byl jeho střelecký úhel co největší?“

4 **Úloha 1 „Tyč“:**
„Urči střelecký úhel (velikost úhlu *PTL*), stojí-li fotbalista na hranici velkého vápna na úrovni brankové tyče.“



Žáci pracují samostatně ve dvojicích s pomocí pracovních listů.
Učitel průběžně kontroluje práci dvojic.
Řešení:



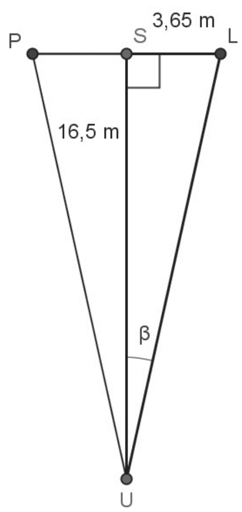
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7{,}3}{16{,}5} \rightarrow \alpha \doteq 23{,}87^\circ \doteq 23^\circ 52'$$

Žáci mohou zvolit i funkci kotangens.
Pozn.: Žáci by mohli chybovat ve volbě goniometrické funkce a v zaokrouhlování při převodu na stupně a minuty v šedesátkové soustavě. Zde je příležitost (pokud to není běžnou součástí výuky) ukázat princip zaokrouhlování, pokud jde o zaokrouhlení „od půlky“ a nikoli „od pětky“, což by mohla být tzv. formální znalost.

Rychlejším žákům je možné zadat úlohu 2. V průběhu realizace se členové týmu nakonec rozhodli zadávat úlohy 1 a 2 najednou.[11]

5 **Úloha 2 „Branka“**
„Urči střelecký úhel (velikost úhlu *SUL*, resp. *PUS*), stojí-li Filip na hranici pokutového území uprostřed brány.“

Učitel průběžně kontroluje práci dvojic. Může využít analogii s úlohou o „štaflích“, resp. o „střeše“ z předešlých hodin.
Žáci pracují samostatně ve dvojicích.
Řešení:



Hledaný úhel je 2β.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3{,}65}{16{,}5} \rightarrow \beta \doteq 12{,}47^\circ \doteq 12^\circ 28'$$

$$2\beta \doteq 24{,}95^\circ = 24^\circ 57'$$

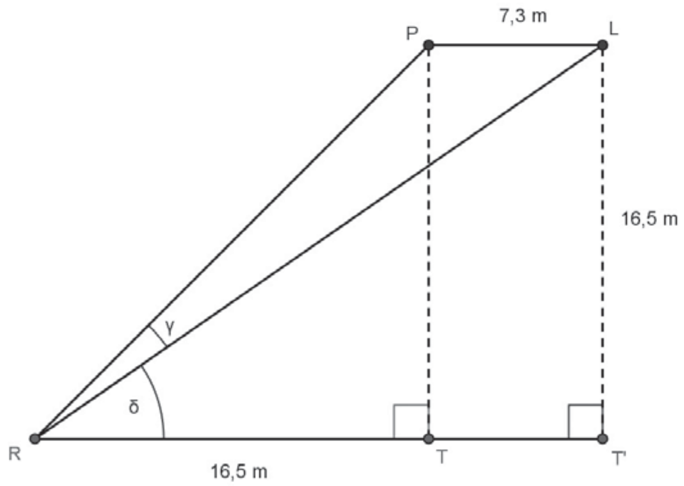
		Pozn.: Žákům by mohlo působit potíže to, že pravoúhlý trojúhelník není hned vidět, musí se nejdříve najít, a dále se musí určit velikost *SL*. Problémem by mohlo být, že nepočítáme velikost hledaného úhlu, ale jeho poloviny. Hledaný úhel můžeme označit jiným symbolem. Je možné také označit hledaný úhel *PUL* a následně počítat velikost β/2. Při výpočtu velikosti 2*β* dostaneme jiný výsledek, pokud budeme používat rovnou údaj ve stupních a minutách (12°28'), což je způsobeno právě zaokrouhlováním.[12] Poznamenáváme, že všechny tečky nad rovnítky jsou správně umístěné, resp. správně chybí.
5a	**Doplňující úlohy** **Nápovědné otázky**	Rychlejším žákům je možné zadat doplňující úlohy (viz úloha D1 a D2 pod tabulkou). Doplňující úlohy byly vytvořeny především proto, že v průběhu všech čtyř realizací experimentální vyučovací hodiny byli ve třídě skutečně takoví žáci, kteří výrazně předběhli ostatní. Pro ty je pak nutné hledat smysluplnou činnost. Úlohy je možné zadávat postupně, nejprve po vyřešení úlohy 2 a další po vyřešení úlohy 3, nebo pouze po vyřešení úlohy 3. Kolik doplňujících úloh a kdy je zadat, je nutné řešit individuálně. Žákům, kteří nemohou nalézt žádné řešení, je možné pomoci nápovědnými otázkami (viz pod tabulkou).
6	**Prezentace žákovského řešení úlohy 1 na tabuli**	Učitel vybere jednu dvojici (příležitost pro slabší žáky), která bude postup řešení úlohy 1 prezentovat. Vybraná dvojice prezentuje řešení, ostatní ho kontrolují se svým postupem. Učitel uzavře řešení úlohy 1 a srovná výsledek s odhadem.
7	**Prezentace žákovského řešení úlohy 2 na tabuli**	Učitel vybere další dvojici a klade jí doplňující dotazy. Vybraná dvojice prezentuje své řešení, ostatní si kontrolují se svým postupem. Nakonec učitel uzavře řešení úlohy 2 a porovná výsledek s odhadem. Porovná obě předcházející řešení.
8	**Zadání úlohy 3 „Roh“** „Urči střelecký úhel (velikost úhlu *PRL*), stojí-li fotbalista v rohu velkého vápna.“	Žáci pracují samostatně ve dvojicích, na výzvu učitele může některý žák pomoci ostatním a navrhnout, které pravoúhlé trojúhelníky lze využít. Pozn.: U žáků se mohou projevit obtíže s dopočítáním chybějících velikostí, pozor je také třeba dát na odečítání ve stupních a minutách. Je také možné, že žáci zvolí nepravoúhlý trojúhelník PRL, následně se ho budou snažit nějak rozdělit, aby vznikl pravoúhlý, nebo naopak budou řešit pomocí goniometrických funkcí, jako by trojúhelník pravoúhlý byl.

[10] Je zajímavé odhady upřesňovat postupně po řešení dílčích úloh. Zajímavý je rozdíl mezi řešením úlohy 1 a 2, kde je rozdíl jen kolem 1°.

[11] Po první realizaci experimentální hodiny členové týmu zjistili, že žáci byli s prvními dvěma úlohami rychle hotovi. Aby mohl vyučující v klidu kontrolovat, případně vysvětlovat, bylo praktičtější zadat tyto úlohy najednou. Oproti tomu třetí úloha byla složitější a měla více řešení, proto bylo lepší vypracovat ji samostatně.

[12] Zde je příležitost k diskusi o vlivu zaokrouhlování na výsledek. Je možné upozornit na konkrétním výpočtu, jaký rozdíl ve výsledku dostaneme, protože funkce tangens relativně „rychle roste“. Můžeme se také zmínit, že je vždy třeba zaokrouhlovat, protože pracujeme v oboru reálných čísel a čísla, která by měla vycházet na kalkulačce, jsou často iracionální.

Řešení A:



Označíme γ + δ = ω. Z trojúhelníku *RTP* vypočítáme velikost úhlu ω.

Velikost *RT:* |RT| = (40,3 – 7,3)/2 m = 16,5 m

Velikost úhlu ω buď dopočítají pomocí funkce tangens, nebo „uhádnou“ ω = 45°.

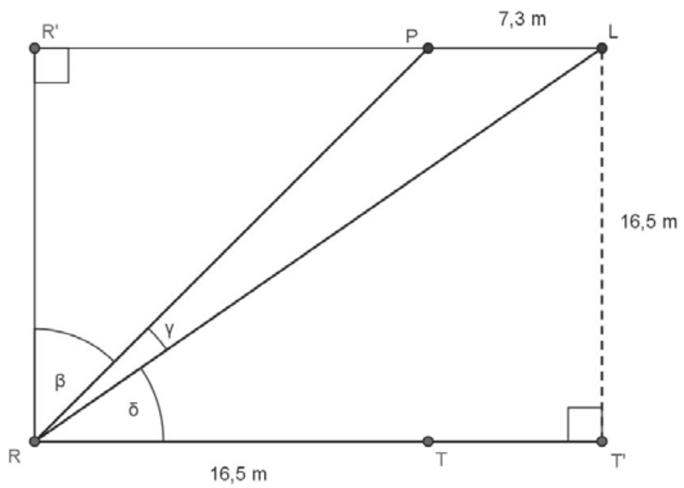
Z trojúhelníku *RT'L* vypočítáme velikost úhlu δ:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{16{,}5}{16{,}5+7{,}3} = \frac{16{,}5}{23{,}8} \rightarrow \delta \doteq 34{,}73^\circ \doteq 34^\circ 44'$$

Hledaný úhel je γ = ω – δ ≐ 45°– 34°44' = 10°16'.

Řešení B:

Hledaný úhel γ najdeme jako 90° – β – δ. Velikost úhlu β = 45° by žáci mohli „uhádnout“; jde o úhel úhlopříčky a strany čtverce.



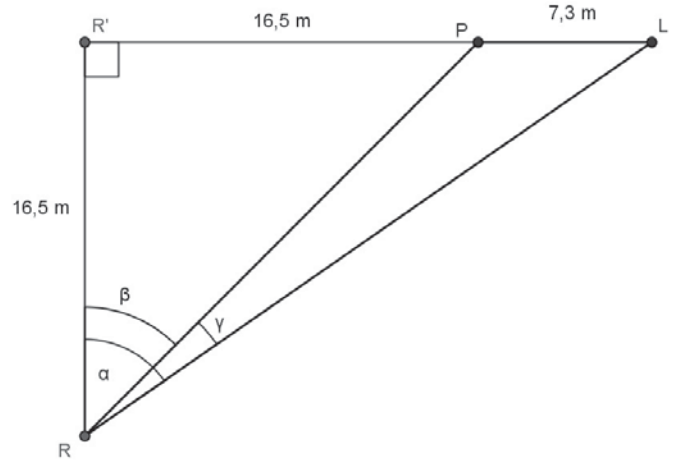
Velikost úhlu δ určíme výpočtem:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{|LT'|}{|RT|+|TT'|} = \frac{16{,}5}{16{,}5+7{,}3} = 0{,}69$$

$$\delta \doteq 34{,}73^\circ \doteq 34^\circ 44'$$

Proto γ = 90° – β – δ ≐ 90°– 45°– 34°44' = 10°16'.

Řešení C:
Hledaný úhel γ vyjádříme jako α – β. Velikost úhlu β = 45° mohou žáci „uhádnout“ (nebo zjistit pomocí funkce tangens).



Velikost úhlu α určíme pomocí funkce tangens:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{|R'P| + |PL|}{|RR'|} = \frac{16{,}5 + 7{,}3}{16{,}5} = 1{,}44$$

$$\alpha \doteq 55{,}27° \doteq 55°16'$$

Proto γ = α – β ≐ 55°16' – 45°= 10°16'.

V průběhu výuky se objevil ještě další způsob řešení, který využíval zkušenosti z výuky z minulého ročníku; označíme ho řešení D („papírková metoda“). Jelikož je obrázek nakreslen ve správných poměrech, je možné úhel buď přímo změřit, nebo využít měřítek (klasických nebo z papírku podle některého ze zadaných údajů) a měřit chybějící délky stran. Toto řešení není principiálně chybné, ale spíše nepřesné.

9 **Prezentace žákovského řešení úlohy 3 na tabuli**	Učitel vybere alespoň jednu dvojici a klade doplňující dotazy. Vybraná dvojice prezentuje řešení, ostatní kontrolují se svým postupem. Lze předpokládat diskusi jednak proto, že někteří budou postupovat jinak, a také proto, že někteří řešení mít nebudou. Učitel uzavře řešení úlohy 3. Srovná ho s předcházejícími řešeními a s žákovskými odhady. Učitel se podle času musí rozhodnout, zda se bude v hodině prezentovat více způsobů řešení. Ty pak musí porovnat.
10 **Shrnutí**	Učitel provede celkové shrnutí průběhu hodiny a výsledků práce. V závěrečné diskusi může učitel použít následující otázky: „Jak ovlivní střelecký úhel brankář stojící v bráně? Jak ovlivní hráč střelecký úhel, když vyběhne k brance? Jak ovlivní střelecký úhel brankář, když vyběhne proti míči?“

Tyto otázky byly použity také v následujících hodinách, kdy se členové týmu k problematice vrátili a diskutovali například imperiální jednotky.“

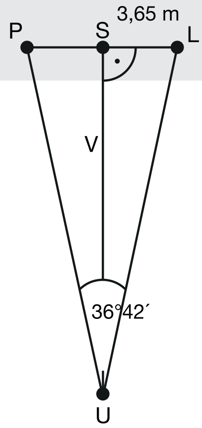
11 **Domácí úloha**
„Jak daleko od středu brankové čáry stojí Filip, jestliže je jeho střelecký úhel 36°42'?
Výsledek zaokrouhli na celé metry.“

Učitel zadá domácí úlohu.
Řešení:

Zadaný úhel je $2\beta \to \beta = 18°21'$.

$$\text{tg } 18°21' = \frac{3{,}65}{v} \to v \doteq 11{,}004$$

$v \doteq 11$ m



Formulaci domácí úlohy se členové týmu věnovali především proto, aby si explicitně uvědomili, jaký typ úloh by žák měl být po této hodině schopen řešit. Sami učitelé domácí úlohu v hodině nezadávali.

4.3.1 Doplňující úlohy

Doplňující úloha D1: Filip stojí opět přímo naproti středu branky na hranici pokutového území a rozeběhne se směrem k brance. Ve chvíli, kdy jeho střelecký úhel vzroste na 50°, vystřelí k levé tyči branky. Jak daleko od tyče v tu chvíli stojí?

Řešení: Označme střelecký úhel $\alpha = 50°$, $\frac{\alpha}{2} = 25°$, potom $\sin 25° = \frac{3{,}65}{x}$, $x = \frac{3{,}65}{\sin 25°}$, tedy $x \doteq 8{,}64$ metrů.

Doplňující úloha D2: Filip si na konci tréninku zkouší střelu z hranice pokutového území. Stojí opět naproti pravé tyči brány a při jednom pokusu trefí míč přímo do pravé „šibenice“, tedy do místa, kde se střetávají pravá tyč a břevno brány. Vypočítejte velikost úhlu, který svírá dráha letu míče s rovinou hřiště. Výška fotbalové branky je 8 stop, vzdálenost hranice pokutového území od brankové čáry je 18 yardů. Jeden yard měří tři stopy.

Řešení: Nejdříve provedeme převod na stejné jednotky: 18 yardů = 54 stop. Označme φ hledaný úhel, potom $\text{tg } \varphi = \frac{8}{54}$, $\varphi \doteq 8°26'$.

Pozn.: Úloha D2 předpokládá znalost odchylky přímky od roviny. V případě dostatku času lze zadat složitější verzi úlohy D2a.

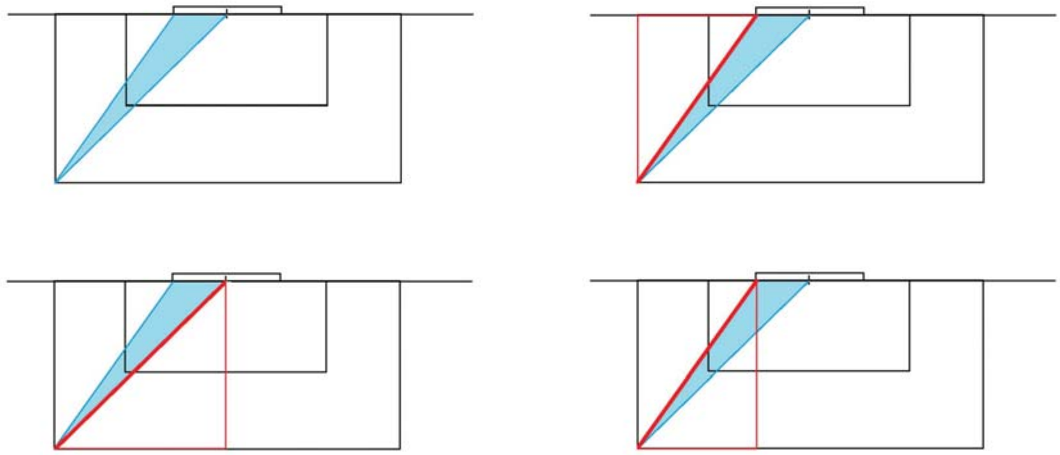
Doplňující úloha D2a: Filip si na konci tréninku zkouší střelu z hranice pokutového území. Stojí opět naproti pravé tyči brány a při jednom pokusu trefí míč přímo do pravé „šibenice“, tedy do místa, kde se střetávají pravá tyč a břevno brány. Vyjádřete v metrech za sekundu rychlost vystřeleného míče, jestliže „šibenici“ zasáhl za 0,831942094 sekundy. Dále vypočítejte velikost úhlu, který svírá dráha letu míče s rovinou hřiště. Výška fotbalové branky je 8 stop, vzdálenost hranice pokutového území od brankové čáry je 18 yardů. Jeden yard měří tři stopy.

Řešení: Výpočty navíc oproti předchozímu zadání: $d = \sqrt{18^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2}$, $d = \sqrt{331{,}\overline{1}}$ yardů,

$d = \sqrt{331{,}\overline{1}} \cdot 0{,}9144$ metrů.

Tuto vzdálenost uletí míč za 0,831942094 sekundy. Za 1 sekundu $\frac{\sqrt{331{,}\overline{1}} \cdot 0{,}9144}{0{,}831942094}$ metrů.
Tedy $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4.3.2 Návodné otázky a instrukce pro slabší žáky při samostatném řešení úlohy 3 (řádek 5a tabulky)



- „Potřebujeme spočítat velikost střeleckého úhlu. Najdeš ho na obrázku? Vyznač ho."
- „Je trojúhelník, který jsi teď vyznačil/a, pravoúhlý?"
- „Dokážeš najít nějaký pravoúhlý trojúhelník, který má s vyznačeným trojúhelníkem společnou jednu stranu?"
- „Dokážeš spočítat velikosti úhlů v tomto pravoúhlém trojúhelníku? A které?"
- „Jaké rozměry potřebuješ znát? Znáš je? Dokážeš je odvodit nebo vypočítat?"
- „Jakou goniometrickou funkci zvolíš pro výpočet?"
- „Co jsi spočítal? Proč je dobré znát velikost tohoto úhlu?"
- „Je tam ještě jiný pravoúhlý trojúhelník, který ti může pomoci k výpočtu ‚modrého' úhlu?"
- „Který? Jak ti pomůže? Spočítej velikost úhlu v dalším trojúhelníku."

5 PŘÍMÁ A NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

Tým 2. stupně z Prahy sestával z učitelů tří základních škol (fakultních škol Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze) a didaktičky matematiky.

- Naďa Vondrová (Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta)
- Eva Holá (ZŠ Ratibořická, Praha 9; EH), Martin Novák (ZŠ Ostrovní, Praha 1; MN), Petra Prokopová Machalová (ZŠ Táborská, Praha 4; PP)

Ve školním roce 2014/15 učitelé vyučovali v 6. a 7. ročníku. Při diskusi o školních vzdělávacích plánech na příslušných školách zjistili, že všechny tři školy mají na druhé pololetí v plánu vyučovat přímou a nepřímou úměrnost. Na ZŠ Táborská a ZŠ Ratibořická se téma vyučuje v 7. ročníku a ŠVP pro 6. ročník na ZŠ Ostrovní obsahuje úvod do tématu.[13] Protože se současně jedná o téma, které je poměrně náročné (žáci mají často problémy s uchopením zejména nepřímé úměrnosti, je pro ně obtížné pracovat s abstraktním vyjádřením úměrností pomocí rovnice apod.) a současně nabízí celou řadu možností, jak k němu přistoupit (viz níže), rozhodli se členové týmu nakonec právě pro toto téma.

5.1 Záležitosti kurikula

Podle RVP ZV patří mezi učivo 2. stupně funkce, konkrétně pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost a lineární funkce. Mezi očekávané výstupy patří, že žák „určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti, vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem a matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů".

Výstupy jsou více konkretizovány v ŠVP zúčastněných škol. Podle nich žák rozlišuje pořadí členů v poměru, uvede poměr v základním tvaru, řeší slovní úlohy s využitím poměru, rozliší přímou a nepřímou úměrnost, s porozuměním použije trojčlenku v jednoduchých slovních úlohách na přímou nebo nepřímou úměrnost, sestrojí obraz bodu v rovině a naopak z grafu určí souřadnice daného bodu, sestrojí graf přímé a nepřímé úměrnosti, zapíše tabulku přímé i nepřímé úměrnosti, řeší a vytváří slovní úlohy s využitím vztahů přímé a nepřímé úměrnosti, řeší a vytváří slovní úlohy pomocí trojčlenky.

5.2 Cíle experimentálních hodin a vyučovací přístupy

Původním cílem bylo připravit výuku několika prvních vyučovacích hodin tématu. Jak diskuse pokračovaly, členové týmu zjistili, že to není možné. Je třeba mít přehled i tom, jak bude výuka pokračovat. Nakonec se tedy rozhodli ke zpracování celého tematického bloku, původně plánovaného na 8 vyučovacích hodin.

Každý z učitelů inklinuje spíše k takovému způsobu výuky, který přenáší hodně zodpovědnosti na žáky. Poměrně rychle se tedy dohodli, že příprava bude koncipována tak, aby měli žáci v poznávacím procesu co nejaktivnější roli. Tedy nové poznatky by jim neměly být sdělovány, ale měly by vyplynout z řešení vhodně volených úloh.

Cílem experimentálních hodin tedy bylo, aby žáci pochopili, co to je přímá a nepřímá úměrnost, jak se úlohy na úměrnosti řeší, aby uměli vyčíst údaje (a slovně je popsat) z tabulky, grafu, případně i rovnice. Neméně důležitým cílem bylo, aby se žáci naučili řešit slovní úlohy ne pomocí signálních slov, ale pomocí rozboru a pochopení podstaty situace. Žáci se také seznámili se základy před-výrokové matematiky. Členové týmu kladli velký důraz na čtení s porozuměním.

Po pochopení daných závislostí by žáci mohli být schopni jednoduché úlohy vytvářet a vyhledávat pro ně inspiraci ve svém okolí. Velký důraz kladli členové týmu na to, aby úlohy byly žákům srozumitelné a blízké jejich zkušenostem.

[13] Učitel MN původně plánoval, že z přípravy v 6. ročníku odučí jen přímou úměrnost. Ovšem vzhledem k tomu, že se členové týmu nakonec přiklonili k tomu oba typy úměrností od sebe striktně neoddělovat, rozhodl se také on, že odučí celé téma.

5.3 Příprava experimentálních hodin

Kromě vlastních zkušeností vycházeli členové týmu při přípravě hodin z rozboru několika učebnic pro základní školy. Důležitou inspirací pro ně byla i diplomová práce na dané téma, která shrnula některé obtíže žáků spojené s tématem a představila i zajímavé úlohy. Neméně důležitou roli hrály rozbory videoukázek z počátku projektu, díky nimž si ujasnili, jakou cestou se dají.

Když se členové týmu shodli na základním výukovém přístupu, bylo nutné vyjasnit několik dalších věcí.

Tou první bylo pořadí, v jakém se budou úměrnosti probírat. Rozhodli se, že nepůjdou klasickou cestou učebnic, kdy je nejdříve probírána přímá a pak nepřímá úměrnost, ale že budou zařazovat od začátku úlohy na oba typy úměrností, ale současně i úlohy, které nejsou ani jednou z nich (tedy úlohy, které zdánlivě vypadají, že se mají řešit pomocí úměrnosti, můžeme si u nich říct „čím víc jednoho, tím víc druhého", ovšem veličiny se nemění ve stejném poměru). Od toho si slibovali, že se žáci naučí spíše situaci porozumět, než aby se snažili mechanicky aplikovat postupy, které se v hodinách budou učit.

Další důležitou věcí bylo zařazení trojčlenky. Ta je některými učiteli považována za nejdůležitější součást tématu, která urychlí řešení. Jinými je zatracována jako pravidlo, které se žáci naučí bez porozumění a které se následně snaží aplikovat na všechny možné druhy úloh bez ohledu na to, zda se to dá. Členové týmu se shodli, že trojčlenka bude zařazena až poté, co se žáci naučí řešit úlohy na úměrnosti bez ní. Jde až o následný krok, v němž dojde k zobecnění konkrétních postupů, které žáci předtím zvládnou.

Série experimentálních hodin začíná roztřiďováním výroků do jednotlivých typů (vlastně na přímé a nepřímé úměrnosti a „neúměrnosti", ale to žáci zatím nevědí). Záměrem týmu bylo, že žáci nebudou úlohy řešit, ale budou pouze o situaci uvažovat a představovat si ji. Pomocí diskuse nad výroky plánovali členové týmu dosáhnout hlubšího porozumění textům úlohy.

Úlohy v následujících hodinách jsou záměrně voleny tak, aby byly početně jednoduché (až na jednu úlohu), aby se žáci nezabývali složitými výpočty, ale aby se mohli soustředit na podstatu rozlišení vztahů. Na jednoduchých úlohách v dalších hodinách členové týmu postupně zařadili řešení úloh pomocí tabulky a následně i pomocí grafu. S trojčlenkou se žáci, jak už bylo zmíněno, seznámí až na závěr celého bloku.

5.4 Konkrétní plán a postřehy z realizace hodiny

V tabulce níže bude představena celá série hodin, která byla věnována úměrnostem. Téma bylo odučeno na všech třech školách zapojených do projektu, postřehy z realizace přípravy tedy pocházejí od tří učitelů (jsou uvozeny jejich iniciálami). Výuka MN probíhala v 6. ročníku, výuka EH a PP v 7. ročníku. Ze zpětné vazby od učitelů je zřejmé, kde by členové týmu po zkušenostech s experimentální výukou něco v původní přípravě změnili.

Aktivita	Role učitele a žáků
0. hodina: Ověření znalostí poměru	
1 **Úvodní test týkající se poměru a vynášení bodů v soustavě 0*xy*.**	Před vlastní experimentální výukou se žáci učili téma poměr. Učitel vytiskne zadání každému žákovi nebo zadání promítne. Žáci test vypracují.

Test se psal cca 15 až 20 minut.

1. hodina: Žáci se naučí rozlišovat různé typy závislostí	
2 **Třídění na pravdivé a nepravdivé výroky** Příklady výroků: „Jestliže 1 žvýkačka stojí 5 Kč, tak 2 žvýkačky budou stát 10 Kč.“ „Kapesník schne 15 minut. Dvacet kapesníků bude schnout 5 hodin.“ „Voda tekoucí rovnoměrně vodovodním kohoutkem naplnila desetilitrový hrnec za tři minuty. Pokud bude voda téci do stejného hrnce dvakrát rychleji, naplní ho za poloviční čas.“	Učitel vytiskne pracovní list a v ideálním případě předem také rozstříhá, aby se žáci zbytečně nezdržovali v hodině. Výroky by měly být pro snazší kontrolu očíslované. Žáci roztřídí kartičky na pravdivá a nepravdivá tvrzení. Provedou kontrolu ve dvojicích a pak pod vedením učitele s celou třídou. Nepravdivé výroky žáci vyhodí.

EH: Na začátku hodiny jsme opravovali test z minulé hodiny (15 minut) a tento čas nám potom chyběl při práci na pracovním listu. Při samotném cvičení se mi osvědčila kontrola na interaktivní tabuli, na níž žáci třídili kartičky.
PP: Na rozdíl od doporučeného postupu jsem žákům nepravdivá tvrzení ponechala a nechala je vlepit do sešitu. Myslím si, že není od věci, když žák ví, co je či není pravdivé tvrzení. Velice se mi osvědčila diskuse nad jednotlivými výroky. Zabralo to sice hodně času, ale žáci se takto lépe seznámili s „prevýrokovou “ matematikou. Diskuse byly např. nad pravdivostí výroku o kapesnících (viz nahoře), nebo nad výrokem: „Do letadla Boeing se vejde 200 lidí. 136 osob přepraví z místa A do místa B za 10 hodin. Dvě stejná letadla na stejné trase přepraví stejný počet lidí v polovičním čase.“
MN: Při třídění výroků na pravdivé a nepravdivě si někteří žáci nevěděli rady. Pomohl jsem jim instrukcí, aby si představili, že jsou učitelé a opravují test. Výrok $3 \times 3 = 9$ bych dal na hromádku „pravdivé“ a $3 \times 3 = 4$ na hromádku „nepravdivé“.

3 **Třídění pravdivých výroků do kategorií** Kolikrát se zvětší jedna hodnota, tolikrát se zvětší druhá hodnota. Kolikrát se zmenší jedna hodnota, tolikrát se zmenší druhá hodnota. Kolikrát se zmenší jedna hodnota, tolikrát se zvětší druhá hodnota. Kolikrát se zvětší jedna hodnota, tolikrát se zmenší druhá hodnota. Správné tvrzení, ale nelze zařadit do žádné z předchozích skupin.	Pravdivé výroky žáci dělí do pěti skupin podle návodu na pracovním listu (příklad části vyplněného listu je na obr. 5.1). Pracují ve dvojicích nebo menších skupinách. Učitel pomáhá při diskusích ve skupinách. Nakonec je plánována společná kontrola.

EH: Osvědčila se mi kontrola na interaktivní tabuli.
PP: Ve třídě je velký počet dětí s nějakou poruchou, pro ně byla tato aktivita velice důležitá. Celé to zabralo dvě vyučovací hodiny, ale čas věnovaný této aktivitě se vyplatil. V následujících hodinách vše tak nějak hezky vyplynulo; tabulky, výpočty, trojčlenka.

4 **Domácí úkol: doplňování slov do vět**
Př.: „Počet jablek na stromě [A] přímo úměrný [B] stromu.
A1 je, A2 není
B1 šířce, B2 velikosti, B3 hmotnosti“

Cílem aktivity bylo, aby žáci podobně jako v celé vyučovací hodině uvažovali o podstatě závislostí mezi veličinami.

2. hodina: Žáci se naučí řešit některé slovní úlohy na úměrnosti a pojmenovat je

5 **Stravenky**
„Maminka při nákupu v potravinách používá stravenky. Při posledním nákupu platila 380,- Kč, což byla hodnota přesně 4 stravenek.
a) Jaká je hodnota jedné stravenky?
b) Většinou se v obchodech na stravenky nevrací. Člověk u pokladny bývá často ve stresu, aby nezdržoval, aby správně napočítal počet stravenek. Navrhněte nějakou pomůcku, která vám pomůže určit počet stravenek na základě ceny nákupu.“

Učitel klade návodné otázky vztahující se k úloze a řídí žákovskou diskusi:
„Jakou hodnotu mají naše stravenky? Jakou hodnotu stravenky mohou mít? Jak se dají stravenky využít?“
Žáci se pokusí vymyslet, jak by mohla vypadat pomůcka pro rodiče při placení stravenek. Učitel je povede k sestavení tabulky, v níž budou žáci nacházet závislosti mezi sloupečky a označovat je šipkami s popisem.
Připraveny jsou stravenky v hodnotě 95 Kč, lze však žáky nechat pracovat s jinými hodnotami.

EH: Většina žáků měla dobrý přehled o tom, co stravenky jsou a jakým způsobem se využívají. Dokonce je měli i někteří u sebe.
PP: Tady mi opět nevyšla časová dotace, měli jsme ve třídě rozsáhlou diskusi o tom, co je stravenka, jaké jsou další možnosti směny (nepeněžní). Úloha byla pro žáky motivační. Bylo vytvořeno několik „taháků“, které žáci prezentovali u tabule, a následně si zvolili ty nejefektivnější (tabulky vodorovně a svisle).

6 **Doplňování vět**
Kolikrát více stravenek maminka použije, tolikrát…je jejich celková hodnota.
Kolikrát méně stravenek maminka použije, tolikrát…je jejich celková hodnota.

U tabulky vzniklé v bodě 5 se učitel zeptá, zda v ní můžeme vidět nějaké vztahy. Vede žáky k formulaci vět, které následně zapíše (viz vlevo).
Žáci doplní dané věty.
Učitel uvede pojem „přímá úměrnost“ pro některé ze situací, které žáci dosud poznávali.

7 **Tabulka**
„Jedna lesní dělnice vysadí 280 stromků za 6 dní. Potřebujeme je vysadit dříve. Za jak dlouho to stihneme s více dělnicemi?“

Učitel vede diskusi žáků o tom, kolik dělnic musíme mít, aby šla práce rychleji.
Aktivita směřuje k sestavení tabulky a poté vyznačení některých závislostí mezi sloupečky. Poměry upravíme na základní tvar.

Počet dělnic	1	2	3	4	5	6
Počet dní	6	3	2	1,5	1,2	1

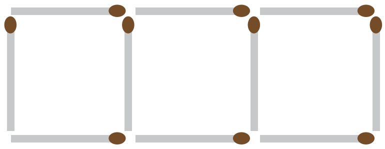
EH: Žáci měli opět tendenci čísla mezi sebou odčítat místo dělit. Ale jakmile dostali návod, jak řešit, začalo se jim dařit tabulku vyplňovat. Bohužel jsme zas narazili na nedostatky v numerickém počítání. Tato třída je skutečně velmi slabá.

8 **Doplňování vět**
Kolikrát více bude lesních dělnic, tolikrát …… dní bude sázení trvat.
Kolikrát méně bude lesních dělnic, tolikrát …… dní bude sázení trvat.

Žáci doplní dané věty.
Učitel uvede pojem „nepřímá úměrnost“.

9 **Čtverec**
„Ze čtyř zápalek sestavíme čtverec. Přiložte další zápalky ke čtverci tak, aby vznikl další čtverec v jedné řadě, který bude mít s původním čtvercem společnou jednu stranu – jednu zápalku. Kolik zápalek budeme potřebovat na 2, 3, 4,…. čtverce, jestliže budeme pokračovat stejným způsobem jako při vytváření druhého čtverce?“

Žáci situaci modelují nebo kreslí a počty potřebných zápalek sestaví do tabulky.
Učitel vede diskusi, zda jde či nejde o přímou či nepřímou úměrnost.
Otázka navíc: „Jak upravit úlohu, aby se jednalo o přímou úměrnost?“



EH: Zde vznikala řešení, která úplně neodpovídala zadání (např. strana jednoho čtverce tvořila část strany druhého čtverce). Je dobré s žáky řešení prodiskutovat a zjistit, proč řešení neodpovídá zadání. Bohužel však řešení těchto třech úloh v jedné hodině neposkytuje příliš mnoho prostoru pro diskusi.
PP: Tato úloha byla zadána až následující hodinu (věnovala jsem hodně času diskusi, což doporučuji, odstranili jsme chyby). Někteří z žáků nedokázali přečíst úlohu s porozuměním, dělali chyby při tvorbě obrázku (tito žáci mají stále potřebu manipulovat s dřívky, nedokážou si to představit pouhým nákresem).

10 **Vajíčko a krejčí**
„Petřík si chce uvařit jedno vajíčko natvrdo. Maminka mu řekla, že se vaří 6 minut. Napadlo ho, jak dlouho by trvalo, kdyby si jich chtěl uvařit víc.“
„Krejčí koupil 2,75 m látky a zaplatil 638 Kč. Urči cenu za 4 m látky.“
„Bazén se napouští třemi stejně výkonnými čerpadly 7 hodin. Za kolik hodin by se napustil 5 stejně výkonnými čerpadly?“

Jsou připraveny úlohy pro případ, že by v hodině zbyl čas.

Úlohy se stihly ve výuce jen jednoho z učitelů. Členové týmu po zvážení doporučili nesnažit se během jedné hodiny dělat všechny typy úloh, ale věnovat celou jednu hodinu jen přímé úměrnosti a jednu hodinu nepřímé úměrnosti.

3. hodina: Žáci si upevňují řešení slovních úloh pomocí tabulky a učí se sestrojit graf

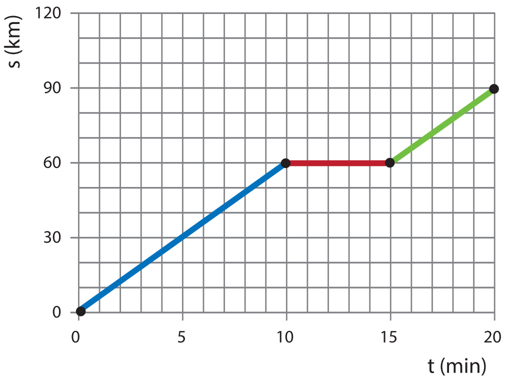
11 **Ujetá vzdálenost**
„Automobil jede průměrnou rychlostí 60 km/h. Urči, kolik kilometrů ujede od chvíle, kdy začneme měřit čas, za 1, 2, 3, 4, 5, 6 hodin.“

Žáci sestaví tabulku a pod vedením učitele najdou poměry a pokusí se odpovědět na složitější otázky (doplnit tabulku pro 12, 20 atd. hodin).
Je třeba navodit diskusi o reálnosti úlohy; je reálné jet rovnoměrně a řídit několik hodin bez přestávky?
Pod vedením učitele žáci sestrojí graf. Z grafu žáci přečtou, za jak dlouho ujedeme 150 km.
Případně sami žáci vymýšlejí podobné otázky.

EH: Ve slabší třídě bylo poměrně náročné najít nějaké závislosti v rámci tabulky. Ale v okamžiku, kdy jsme našli jednu závislost, další už byly jednoduché.

MN: Na naší škole se téma grafů propojilo s dalšími předměty (ve fyzice žáci tvořili první graf z naměřených hodnot, v informatice grafy vytvářeli v MS Excelu).
PP: Graf jsem ještě nezadala. Nechávala jsem stále prostor k diskusi o výpočtech a možnostech řešení. K úloze jsme se vrátili až později a graficky ji dořešili. Žáci sami vymysleli pět otázek (tři správné a dvě chybné). Všechny byly napsány na tabuli a každý si musel svoje řešení obhájit. Žáci museli sami chybná řešení odhalit, což se podařilo.

12 **Čtení grafu**
„Jakou situaci popisuje červená část grafu?“



Žáci přečtou, co graf vyjadřuje. S kartézskou soustavou souřadnic se seznámili před výukou úměrností.

MN: Žákům chvíli trvalo, než se oprostili od rychlosti a uvědomili si, že jde o graf závislosti dráhy na čase. Poté již nebyl problém rozklíčovat, že auto stojí.

13 **Doba jízdy**
„Auto má ujet 150 km. Urči, jak dlouho pojede, pojede-li průměrnou rychlostí 30, 40, 50, 60 km/h.“

Žáci sestaví tabulku a pod vedením učitele najdou poměry a pokusí se odpovědět na složitější otázky (100, 120,.... km/hod).
Nastolíme diskusi o tom, jaké povolené rychlosti je potřeba dodržovat na českých silnicích.
Pod vedením učitele žáci sestrojí graf.
Žáci sami vymýšlejí otázky.

EH: Tyto dvě úlohy mi zabraly celou hodinu a další jsme už nestihli. Graf měli udělat za domácí úkol. Příjemné překvapení bylo, že většina žáků měla další hodinu z domova správně vynesené jednotlivé body. Při spojování však zaváhali a raději nechali body izolované. Ve škole jsme si pak graf (část hyperboly) vytáhli společně.
MN: Pokud chce učitel stihnout všechny tři typy úloh, je potřeba, aby nenechával příliš velký prostor pro diskusi. U úlohy na nepřímou úměrnost byla snaha některých žáků napasovat ji na rámec přímé úměrnosti. Dále pak při tvorbě grafů měli někteří žáci tendenci hodnoty linearizovat.

14 **Ručníky**
„Na šňůře visí 12 ručníků. Jeden ručník uschne za čtvrt hodiny. Za jak dlouho uschnou 2, 3, 4, 5 ručníků?“
(Plus další slovní úlohy.)

Žáci pod dohledem učitele řeší dané úlohy tabulkou a grafem.

MN: Stihli jsme jen úlohy na sušení ručníků. Bylo třeba odlišit, zda se ručníky věšely postupně, nebo naráz, a konfrontovat danou situaci s realitou. Byla k tomu docela diskuse.

4. hodina: Žáci se budou snažit formulovat na základě podnětů úlohy na úměrnosti

15 **Tvorba úloh žáky** Dva pracovní listy, z nichž si měli žáci vybrat jeden. Příklad je na obr. 5.2. Ve druhé části měli žáci vybrat tři z vyznačených vztahů a vymyslet na ně slovní úlohu.	Učitel namnoží pracovní listy. Žáci hledají na obrázku závislosti mezi jednotlivými veličinami a své názory obhajují. Některé ze svých vztahů si vyberou a sestaví slovní úlohy. Pokud budou mít žáci problémy, učitel jim může klást otázky: „Cena benzínu se během jízdy zvýšila; vlivem ceny auta, nebo zvýšenou rychlostí? Má celková ujetá vzdálenost autem vliv na jeho cenu? Souvisí množství koupeného benzínu s ujetou vzdáleností bez dokupování benzínu? Určuje cena auta celkovou ujetou vzdálenost? Při koupi auta se budeme zajímat hlavně o spotřebu na 100 km, nebo o rychlost auta? Jestliže pojedeme jen 40 kilometrů, je třeba sledovat spotřebu auta na 100 km? Výrobce automobilů udává spotřebu na 100 km. Proč neudáváme průměrnou spotřebu na kratší vzdálenost?“

Nad některými vztahy bylo potřeba delší dobu diskutovat, aby všichni pochopili, jak je daná závislost myšlena. Především proto, že dva stejné obláčky lze propojit různými barvami – podle toho, jak je vztah myšlen. Po zkušenostech s realizací doporučují členové týmu tuto hodinu zařadit až později v sérii hodin, až budou mít žáci ještě více zkušeností.
MN: Propojování obláčku černou čarou (které spolu nesouvisí) bylo možná základem problémů při tvorbě úloh, které nejsou zaměřeny ani na přímou, ani na nepřímou úměrnost. Žáci tvořili zpravidla úlohy nesmyslné, nikoliv úlohy, které nejsou typově ani přímá a ani nepřímá úměrnost.

5. hodina: Žáci řeší některé z jimi navržených hodin a prohlubují si znalosti o závislostech

16 **Řešení vytvořených úloh**	Učitel vybere některé slovní úlohy, které žáci vymysleli, a řeší je společně ve třídě.

EH: Žáci si převážně vybrali úlohu s autíčky. To bylo patrně způsobeno tím, že už podobné úlohy řešili. I proto by bylo dobré aktivitu zařadit až po některých dalších typových úlohách.
MN: Největší problém byl najít úlohu, která není nesmyslná a zároveň není ani na přímou, ani na nepřímou úměrnost. Žáci si sami vybrali ve skupinkách tři úlohy, každá měla být na jiný typ závislosti (přímá, nepřímá, ani jedno). Pak je ve skupince řešili.
Obecně byla tvorba slovních úloh pro některé žáky spíše obtížnější. Příklady vytvořených slovních úloh (i těch nesprávných) jsou na obr. 5.3.

6. hodina: Ověření, jak žáci umí řešit úlohy na úměrnosti. Žáci se naučí používat trojčlenku.

17 **Průběžný test** „1. Tři dělníci vykopou příkop za 6 dní. Za kolik dní udělá tutéž práci devět dělníků? 2. Zapiš číslo 12 několika způsoby jako součin dvou kladných čísel. Je první činitel přímo, nebo nepřímo úměrný druhému činiteli?“	Cílem testu bylo ověřit, jak žáci zvládnou řešit úlohy úvahou, tabulkou či grafy před tím, než se setkají s trojčlenkou.

17 **Trojčlenka**
„4 balíčky žvýkaček stojí 48 Kč. Kolik bude stát 13 balíčků žvýkaček?“
„3 čerpadla napustí nádrž za 140 minut, za jak dlouho ji naplní 21 stejně výkonných čerpadel?“
„Ve škole koupili 35 ks učebnic zeměpisu a zaplatili za ně 1 890 Kč. Kolik korun by zaplatili za 72 ks těchto učebnic?“
A další úlohy na úměrnosti.

Cílem série úloh je pomocí řešení přes tabulky a poměry dovést žáky k pochopení trojčlenky. Učitel se vždy zeptá, o jakou úměrnost se jedná, a požádá žáky o sestavení tabulky. U tabulky pak žáci hledají různé vztahy.
Učitel klade návodné otázky, např.: „V jakém poměru je počet 2 a 3 kusů? V jakém poměru je cena 2 a 3 kusů? V jakém poměru je počet 2 a 6 kusů?“

↑ 4 balíčky . . . . 48 Kč ↑
13 balíčků . . . . b Kč

„V jakém poměru je počet balíčků?“ 13 : 4
„V jakém poměru je cena?“ b : 48
„Tyto poměry se musí rovnat.“ 13 : 4 = b : 48
Protože žáci zpravidla ještě neumějí řešit lineární rovnice, povede je učitel k řešení přes rozšiřování poměrů.
Trojčlenku zavedeme na úloze na přímou i nepřímou úměrnost.

MN: Jedna slabší dívka, která se doma připravovala s rodiči, přišla již v předchozích hodinách s trojčlenkou. Zdálo se, že zbytek žáků se s ní seznámil až na hodině. Žákům se zdál být tento postup zbytečně obtížný a neochotně jej přijímali, především proto, že daný typ úloh zvládali řešit způsobem, který uměli a který už zvládli. Naproti tomu už měli základy z řešení lineárních rovnic z 1. pololetí, takže samotný výpočet už nebyl problém.
PP: Trojčlenka nedělala vůbec žádný problém. Okamžitě přistoupili na novou možnost řešení. Na tuto hodinu jsem dala podmínku, že můžeme řešit pouze tímto způsobem. Ovšem je fakt, že tato třída pracuje s typy úloh, které vychází z Hejného matematiky (umějí tedy řešit rovnice).

7. a 8. hodina: Žáci si upevňují dovednost řešit úlohy na úměrnosti

19 **Procvičovací úlohy**
„Plně zatížené nákladní taxi uveze 160 krabic po 15 kg. Při další jízdě nakládali krabice o hmotnosti 12 kg. Kolik jich naložili, jestliže hmotnost nákladu byla při obou jízdách stejná?“
„Plný plot je vytvořen z 1 375 latěk širokých 6 cm. Kolik latěk širokých 55 mm by bylo třeba na zhotovení plotu stejné délky?“
„Krychle s délkou hrany 4 dm je poskládána z 8 kostek. Určete délku hrany krychle poskládané z 27 stejných kostek.“ apod.

Žáci řeší úlohy samostatně, ve skupinkách nebo s dopomocí učitele.

MN: Snažil jsem se žáky nabádat, aby si zkusili různé způsoby řešení. Ve skupinách většinou došli ke správnému řešení.
PP: Při řešení úloh pomocí trojčlenky jsem nezaznamenala žádný podstatný problém. Pro žáky s poruchami učení jsem musela pouze číst texty nahlas (dvakrát). Myslím si, že důvod je ten, že jsme věnovali velkou péči přípravám na výpočty (výrokové věty z prvních hodin). Žáci si ujasnili, co se děje, když se něco zmenšuje či zvětšuje. V tabulkách jsme používali šipky, které pomáhaly určovat přímou a nepřímou úměru. Díky těmto přípravným aktivitám nedocházelo k častým chybám.

9. hodina: Závěrečný test

20 **Závěrečný test**

5.5 Závěr

Na rozdíl od ostatních týmů si členové tohoto týmu stanovili za cíl připravit ucelenou přípravu celého tematického bloku. Důvodem byl i fakt, že si vybrali náročné téma, které se nedá probrat během několika málo hodin. Na jedné straně jim to umožnilo mít představu o celém procesu a jednotlivé fáze výuky na sebe vhodně navázat, na straně druhé to bylo značně náročné na zpracování. Všechny hodiny byly natáčeny na videozáznamy, ale vzhledem k jejich počtu (více než 20) se členové týmu v následné reflexi vrátili jen k některým z nich. Vybrali si ty, které řadili mezi klíčové, konkrétně hodinu, kdy docházelo k třídění výroků, a hodinu, kdy zaváděli trojčlenku. Právě zavádění trojčlenky se ukázalo jako nosné pro hlubší reflexi. Jejich třídy totiž reagovaly na trojčlenku značně rozdílně. Zatímco třídy MN se trojčlence víceméně bránily, protože měly pocit, že je zbytečná a řešit úlohy už umí jinak, třídy PP ji přijaly dobře a s pochopením. Naproti tomu třída EH, kterou učitelka hodnotí jako velmi slabou, přijala trojčlenku sice dobře, ale z jiného důvodu. Žáci uvítali, že dostali návod k řešení, díky němuž nebudou muset dělat náročné úvahy, k nimž je vedla učitelka (při řešení úloh úvahou). Tento rozdíl je sám o sobě důležitý a můžeme diskutovat o tom, jaké jsou jeho možné příčiny. Je to díky tomu, jak učitelé společnou přípravu realizovali, nebo je důležitějším faktorem charakter třídy? Jak to ve škole bývá, příčin může být mnoho, a nelze očekávat, že by bylo možné je jednoznačně identifikovat.

Kolikrát se zvětší jedna hodnota, tolikrát se zvětší druhá hodnota.

Jestliže 1 žvýkačka stojí 5 Kč, tak 2 žvýkačky budou stát 10 Kč.

Auto jedoucí průměrnou rychlostí 90 km za hodinu urazí vzdálenost 180 kilometrů za 120 minut.

Deseti kilogramový pytel travního osiva vystačí na 400 m^2 plochy nově zakládaného trávníku. Na fotbalové hřiště o rozměrech 100 m x 70 m musíme tedy koupit 18 takových pytlů.

Kolikrát se zmenší jedna hodnota, tolikrát se zmenší druhá hodnota.

Obvod čtverce zmenšíme 4krát. Délka jeho strany se zmenší také 4krát.

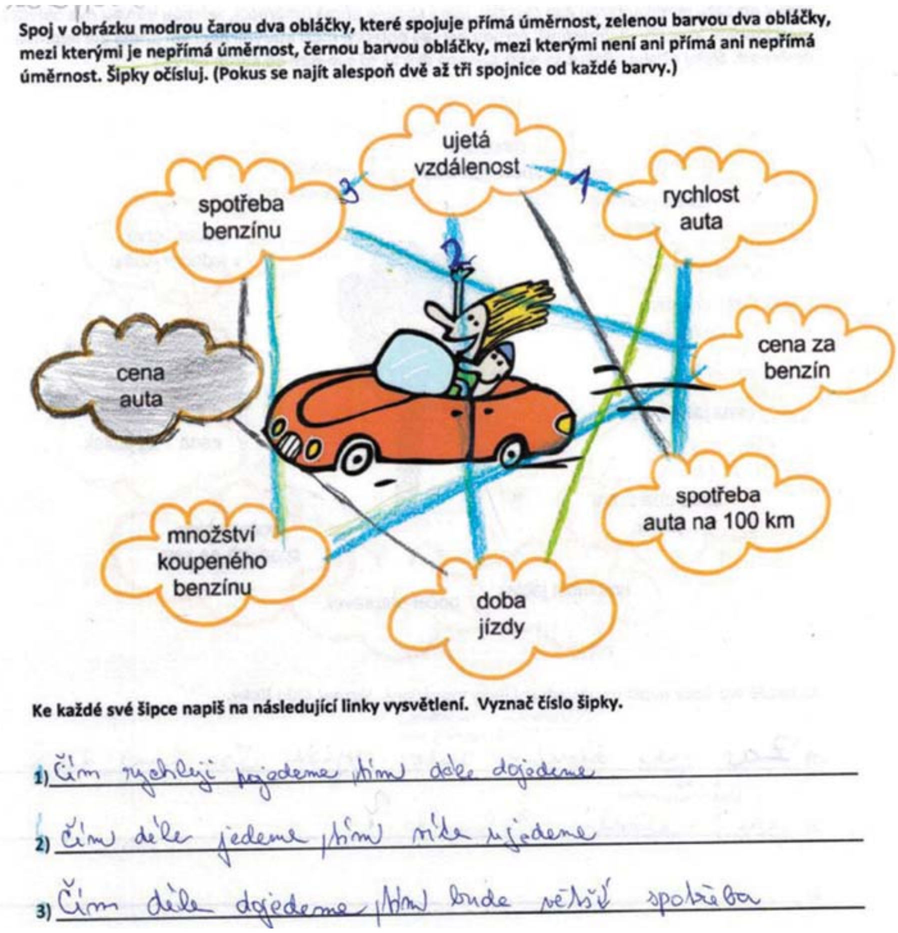
Turista prošel trasu dlouhou 18 km za tři hodiny, což znamená, že jeho průměrná rychlost byla 6 km za hod.

Při nákupu za 400 Kč platila maminka čtyřmi stravenkami. Za dvousetkorunový nákup bude platit dvěma stravenkami.

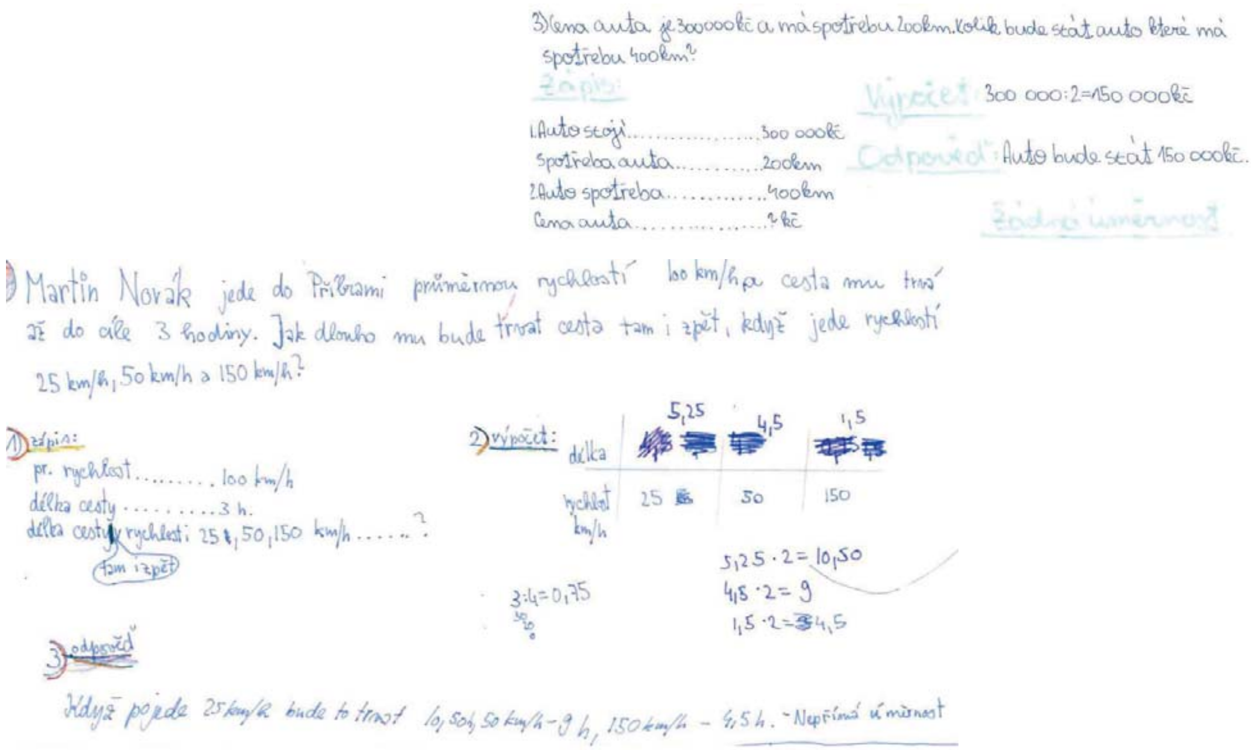
Kolikrát se zmenší jedna hodnota, tolikrát se zvětší druhá hodnota.

Rychlostí 6 km/h dojde Petr na chatu za 2 hodiny. Když se bude loudat rychlostí 3 km/h, projde trasu za 4 hodiny.

OBR. 5.1: ČÁST VYPRACOVANÉHO PRACOVNÍHO LISTU NA TŘÍDĚNÍ VÝROKŮ



OBR. 5.2: JEDEN ZE DVOU PRACOVNÍCH LISTŮ „OBLÁČKY“ (VYPLNĚNÝ)



OBR. 5.3: PŘÍKLADY VYTVOŘENÝCH „SLOVNÍCH ÚLOH“

Volba týmu učitelů 2. stupně probíhala tak, aby mohl být zjištěn potenciál metody „lesson study“ při aplikaci v prostředí jedné školy. Byla zvolena škola, se kterou Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni systematicky nespolupracuje, ale která je v dobré dopravní dosažitelnosti, aby mohla probíhat pravidelná spolupráce didaktika a učitelů.

6.1 Charakteristika školy

Masarykova základní škola Horní Bříza je příspěvkovou organizací města Horní Bříza. Škola rozvíjí tradici základního školství ve městě již 125 let. Jde o úplnou školu s devíti postupnými ročníky. Navštěvují ji převážně žáci z Horní Břízy. Ve školním roce 2015/2016 byla škola tvořena 17 třídami (9 tříd na 1. stupni, 6 tříd na 2. stupni a 2 speciální třídy) a školu navštěvovalo celkem 349 žáků. Pracovalo v ní 26 učitelů, 3 vychovatelky, 6 asistentů pedagoga, 7 správních zaměstnanců a 4 kuchařky.

Vzdělávací nabídka školy a Středisko volného času, které je umístěné v areálu školy, umožňují rozvoj žáků talentovaných i handicapovaných. K rozvoji kompetencí obou těchto skupin žáků je využívána vnitřní diferenciace výuky podle učebního plánu a nabídka volnočasových zájmových aktivit SVČ.

Škola disponuje 35 učebnami, pro výuku jsou využívány odborné učebny nebo pracovny. K výuce dále slouží školní aula, místnost videoprojekce, učebny na dělenou jazykovou výuku, 3 tělocvičny, posilovna, atletický stadion, tenisové kurty, k rehabilitaci mohou žáci využívat saunu a perličkovou koupel. Počítačová síť umožňuje přístup žáků a učitelů na internet v učebnách a ve sborovnách.

Z hlediska projektu bylo významné, že škola disponuje přístroji pro pořizování audiovizuálních záznamů a jejich přehrávání, běžně jsou nahrávány školní akce. Žáci spolu s učiteli zpracovávají zpravodajství školní televize TV Report, je vydáván i časopis Školní kurýr.

6.2 Složení týmu

Tým byl vytvořen ze všech čtyř učitelů matematiky na 2. stupni Masarykovy základní školy Horní Bříza a didaktičky matematiky z Fakulty pedagogické Západočeské univerzity v Plzni. Všichni učitelé mají požadovanou kvalifikaci a dlouholetou praxi na základní škole (viz tabulka 6.1).

	učitel A (42 let)	učitelka B (45 let)	učitelka C (50 let)	učitelka D (53 let)
vzdělání	Fakulta pedagogická ZČU v Plzni – Učitelství pro 2. stupeň ZŠ	Pedagogická fakulta ZČU Plzeň – Učitelství pro 2. a 3. stupeň	Pedagogická fakulta ZČU Plzeň – Učitelství pro 2. a 3. stupeň	Pedagogická fakulta UK Praha – Učitelství VVP pro ZŠ a SŠ
aprobace	M – Ze	M – F	M – Te	M – Te
praxe	ZŠ Horní Bříza	Sportovní gymnázium Plzeň, ZŠ Horní Bříza	ZŠ Zbůch, MŠ Horní Bříza, ZŠ Horní Bříza	4. ZŠ Kladno, 2. ZŠ Slaný, ZŠ Kožlany, ZŠ Manětín, ZŠ Kozojedy, ZŠ Blatnice, ZŠ Horní Bříza
praxe	20 let	22 let	27 let	31 let
pozn.	zástupce ředitele školy		vede kroužek školní TV	IT koordinátor

TABULKA 6.1: KVALIFIKACE A DOBA PRAXE UČITELŮ

Učitelé byli zvyklí na vzájemnou spolupráci již před projektem; ve škole se uplatňují vzájemné hospitace vyučujících, ale podle sdělení učitelů nedochází k detailnějšímu rozboru a hodnocení hodiny. Učitelé se zúčastňují řady neformálních akcí pořádaných školou i dalších akcí v obci, dobře se znají, vyměňují si poznatky o jednotlivých žácích i náměty, které lze uplatnit při vyučování. Podle názoru didaktičky pozitivní vzájemné vztahy vytvářely v projektu optimální prostředí pro uplatnění metody „lesson study“, protože členové týmu neměli problém se vzájemnou komunikací, otevřeným sdělováním pocitů a názorů, přijímáním stanovisek ostatních a otevřenou sebereflexí.

V počátku projektu nebylo proto třeba absolvovat etapu seznamování a sbližování týmu učitelů, ale bylo nutné překonat jistou bariéru ve vztahu k didaktičce, která vstupovala do již vytvořeného týmu jako cizí prvek. Další průběh projektu ukázal, že tato přípravná fáze „lesson study“ je velmi důležitá.

6.3 Organizace činnosti týmu

Po celou dobu trvání projektu se konaly jednou za měsíc schůzky učitelů s didaktičkou. Schůzky probíhaly v prostorách ZŠ v Horní Bříze a byl z nich pořizován zápis. Každé setkání začínalo kontrolou plnění úkolů v předchozím období, následovala společná činnost (společná reflexe hodin, příprava vlastních hodin apod.). Jednání bylo vždy ukončeno rozdělením úkolů na další období. Zejména v období přípravy hodin pro natáčení se vedle těchto schůzek celého týmu scházeli pouze učitelé.

Ve vztahu k naplnění cíle projektu je třeba zmínit význam počáteční etapy činnosti týmu, ve které probíhala analýza hodin zveřejněných koordinátorkou v prostředí Moodle. Členové týmu se učili nejen všímat si určitých jevů v průběhu hodiny, ale získávali především schopnost otevřeně sdělovat své postřehy a náměty, vysvětlovat a obhajovat své postoje. Tento sociální a komunikační aspekt úvodní fáze byl významný i pro tým, ve kterém se učitelé vzájemně znali a byli zvyklí komunikovat v rámci chodu školy i v rámci běžného života.

Pro práci didaktičky byly přínosem hospitace ve třídách, pro které se připravovala hodina, ale i rozhovory s vedením školy, s učiteli, hospitace v dalších třídách. To vše umožnilo poznat zaměření školy a možnosti žáků i učitelů více než jenom studium dokumentů školy.

6.4 Proces přípravy vyučovací hodiny

Příprava vyučovací hodiny probíhala dlouhodobě. Začala již v únoru 2015, kdy tým diskutoval o výběru tematického celku a ročníku, pro který bude hodina připravena. Dospěl k závěru, že se bude dále zabývat vyvozením Pythagorovy věty v 8. ročníku.

V měsíci březnu byl sestaven základní plán hodiny a učitelé začali připravovat materiály pro její úvodní část (čtvercová síť, procvičovací materiál – prezentace Smart, pracovní list pro opakování typů trojúhelníků). Základní návrh struktury hodiny i způsob vyvození Pythagorovy věty připravila učitelka, která později hodinu ve své třídě realizovala, návrh byl na společných schůzkách upravován, upřesňován, doplňován, ale základní idea objevení Pythagorovy věty samotnými žáky zůstávala. Učitelé projevovali rozdílné názory na to, zda žáci k objevu Pythagorovy věty dospějí. Do přípravy hodiny vstupoval tento prvek jako motivační prvek pro učitele.

Koncem března proběhla samotná realizace hodiny v 8.A. Natočení hodiny předcházela příprava žáků na natáčení. I když jsou žáci zvyklí na natáčení na různých akcích školy, natáčení při vyučování pro ně tak běžnou záležitostí nebylo. Proto proběhlo natočení zcela jiné vyučovací hodiny, aby si žáci na přítomnost kamer zvykli. Členové týmu nechtěli průběh hodiny rušit dalším neobvyklým prvkem, proto se domluvili, že v hodině bude vedle vyučující přítomna pouze další učitelka v roli kameramana. Žáci ji znali a věděli, že vede ve škole kroužek školní TV. Ostatní členové týmu nebyli natáčení přítomni. Jedna kamera byla použita jako statická.

Po zpracování záznamu byla provedena individuální reflexe hodiny a na společné schůzce potom společná reflexe. Na této schůzce vznikl návrh na realizaci hodiny i v 8.B, která se v matematice jeví ve srovnání s 8.A jako slabší. Protože při diskusi o průběhu hodiny se členové týmu shodli na tom, že část hodiny určená opakování učiva, které potřebují žáci k vyvození Pythagorovy věty, byla příliš dlouhá a nezbyl dostatek času na samostatnou práci skupin a především na samostatnou formulaci věty, byly provedeny úpravy původní přípravy. Hodina však byla pro porovnání tříd vedena v zásadě stejným způsobem. Zahrnovala tedy jak úvodní opakování, tak skupinovou práci. Opakování ovšem trvalo déle a žáci zvládli formulaci Pythagorovy věty pouze ústně. Zapsat větu na tabuli svými slovy tak, jak to dokázali žáci v 8.A, se v 8.B v průběhu této hodiny nepodařilo.

Hodina v 8.B byla natočena v dubnu. Učitelky si vyměnily role (vyučující a kameramanka), jedna kamera byla statická a na natáčení se podílel i žák, který je členem školního televizního kroužku. Natáčení obou hodin i zpracování záznamů bylo vedeno snahou nic nepřikrášlovat a podat reálný obraz toho, co se ve třídách odehrávalo. Vytvořená hodina má všechny části odpovídající běžné vyučovací hodině, zachycena je i úvodní část se zápisem do třídní knihy a kontrolou domácího úkolu.

V měsíci květnu tým provedl vyhodnocení a srovnání obou natočených hodin. Členové týmu diskutovali o jejich struktuře, porovnávali průběh hodiny v obou paralelních třídách. Videonahrávky potvrdily, že i když příprava na hodinu byla až na menší nuance v opakovací části stejná, průběh hodiny byl jiný. Potvrdila se tak nemožnost pasivního přenosu vzorových hodin do jiné třídy.

V průběhu června byly dopracovány další hodiny navazující na natočenou hodinu (ověření platnosti věty pro jiné typy pravoúhlých trojúhelníků, neplatnost pro trojúhelník, který není pravoúhlý, upřesnění formulace věty, procvičování věty, užití ve slovních úlohách). Videozáznam byl poskytnut k reflexi dalším týmům v projektu.

6.5 Výběr tématu

Výběr tématu, které se tým rozhodoval zpracovávat, byl poměrně komplikovanou záležitostí, protože učitelé pro téma stanovili několik požadavků: musí být podle ŠVP zařazeno do výuky v daném období, musí mít potenciál pro badatelskou činnost žáků, mělo by být využitelné v různých třídách a nejlépe i v různých ročnících.

Po rozsáhlé diskusi bylo zvoleno téma Pythagorova věta, ke splnění časových požadavků však muselo dojít k úpravě původního časového plánu výuky, aby probírání Pythagorovy věty probíhalo v paralelních 8. třídách s jistým časovým odstupem potřebným pro reflexi hodiny natočené v první třídě.

Při výběru tématu hrálo důležitou roli i to, že Pythagorova věta spojuje učivo algebry a geometrie a má hodně aplikací v běžném životě. Pro správné chápání Pythagorovy věty potřebuje žák řadu předchozích znalostí a pro většinu žáků je to první matematická věta, se kterou se setkávají s důrazem na přesnost její formulace. Nelze opomenout ani možnosti, které věta dává pro ukázání historických souvislostí jejího objevu. Jedná se tedy o téma, které může být pro žáky z různých důvodů dostatečně motivující.

I když metodické materiály nabízejí učitelům různé možnosti vyvození Pythagorovy věty, pro učitele se stala výzvou snaha o nalezení nového přístupu k vyvození, při kterém by žáci dostali možnost objevit a formulovat větu sami s minimální podporou učitele.

Při výuce na základní škole kladou učitelé zpravidla důraz na algebraické vyjádření věty a zapamatování vztahu $c^2 = a^2 + b^2$. Tým si proto dal za cíl vytvořit návrh několika vyučovacích hodin, ve kterých by žáci sami dospěli k pochopení podstaty Pythagorovy věty a k jejímu slovnímu i symbolickému vyjádření. Aby se předešlo chybám v chápání Pythagorovy věty, rozhodli se učitelé cíleně pracovat s trojúhelníky v různých polohách a s různým značením vrcholů a stran. V aplikačních úlohách se pak zaměřili na nalezení pravoúhlého trojúhelníku v obrázku.

6.5.1 Zařazení tématu do kurikulárních dokumentů

a) Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (platnost dokumentu od 1. 9. 2013)

Téma Pythagorova věta je v RVP zařazeno ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace (2. stupeň) v tematickém okruhu Geometrie v rovině a prostoru. Souvisí s ním následující očekávané výstupy: Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku. Znalost Pythagorovy věty je významná i pro další výstupy, např.: Žák charakterizuje a třídí základní rovinné útvary, odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů, určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti, odhaduje a vypočítá objem a povrch těles, analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

S tématem souvisí učivo: metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta.

Ve *Standardech pro základní vzdělávání* „Matematika a její aplikace" je Pythagorova věta zařazena do 9. ročníku do tematického okruhu 3 „Geometrie v rovině a prostoru". Očekávaným výstupem podle RVP ZV je: Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku.

Jsou uvedeny čtyři indikátory naplnění výstupu:

- žák využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata, modely,
- žák využívá polohové a metrické vlastnosti (Pythagorova věta, trojúhelníková nerovnost, vzájemná poloha bodů a přímek v rovině, vzdálenost bodu od přímky) k řešení geometrických úloh,
- žák řeší geometrické úlohy početně,
- žák využívá matematickou symboliku.

b) *Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání Masarykovy základní školy Horní Bříza, třída 1. máje 210, příspěvkové organizace, 330 12 Horní Bříza* (Dodatek č. 1 platný od 1. 9. 2013)

Téma Pythagorova věta je v ŠVP zařazeno ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, v předmětu Matematika v 8. ročníku. Jsou uvedeny tyto očekávané výstupy: Žák rozliší odvěsny a přepony, rozumí odvození vzorce Pythagorovy věty, využívá poznatků při výpočtu délek stran pravoúhlého trojúhelníku, umí využít poznatky ve slovních úlohách, zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností. Jako učivo je uvedeno: Pythagorova věta: pojem, výpočet délek stran v pravoúhlém trojúhelníku, užití Pythagorovy věty.

6.8 Cíle vyučovací hodiny z hlediska žáků

Cíle vyučovací hodiny lze rozdělit do dvou oblastí – cíle vědomostní a cíle z hlediska rozvoje osobnosti žáka.

Z vědomostního hlediska si žáci měli zopakovat pojmy číslo, číselné obory, druhá mocnina, připomenout si geometrii jako obor matematiky, zopakovat geometrické pojmy, zejména trojúhelník a vlastnosti trojúhelníků. Hlavním cílem bylo objevit další vlastnost trojúhelníku, kterou ještě neznají (vytvořit hypotézu pro budoucí formulaci Pythagorovy věty).

Z pohledu osobnosti žáka byla vyučovací hodina při společné přípravě rozdělena do tří částí s cílem v každé z nich rozvíjet jinou složku osobnosti žáků.

V úvodní části hodiny měli žáci soutěživou formou procvičovat svoji krátkodobou paměť, kde zároveň k efektivnějšímu zapamatování mohli využít znalost druhých mocnin – cílem bylo hledáním těchto vztahů rozvíjet logické myšlení. Dalšími cíli této části hodiny bylo vést žáky k tomu, aby brali ohled na druhé, aby dodržovali pravidla slušného chování a nevyrušovali, když se skupina soustředí, aby na základě jasných kritérií hodnotili výsledky své činnosti.

V druhé části (opakování pojmů z geometrie) měli žáci procvičovat svoji dlouhodobou paměť, třídit pojmy, na které si vzpomněli, a především rozvíjet komunikativní kompetence. Cílem bylo, aby žák dokázal vyjadřovat myšlenky na odpovídající úrovni, rozvíjel kultivovaný mluvený projev, užíval správnou terminologii a symboliku, vhodně využíval informační technologie, ale zároveň rozvíjel i schopnost naslouchat druhým.

Třetí část hodiny měla být pro žáky nejpřínosnější z hlediska objevitelského a z hlediska získávání dovednosti týmové práce. Při skupinové práci jsou rozvíjeny tyto kompetence:

- k provádění rozboru problému,
- k plánování postupů a úkolů při řešení problémové úlohy,
- ke spolupráci a schopnosti utvářet příjemnou atmosféru v týmu,
- k umění věcně argumentovat,
- k respektování názorů ostatních,
- ke schopnosti sebekontroly a dodržování pravidel slušného chování,
- ke schopnosti odpovědně se rozhodovat podle dané situace.

Dále členové týmu při přípravě hodiny diskutovali o možném průběhu vyvozování Pythagorovy věty ze získaných trojúhelníků. Tento pro žáky obtížný úkol se rozhodli řešit formou volné diskuse, a rozvíjet tak jejich sociální kompetence. V připravené hodině se žáci učí přijímat a oceňovat návrhy řešení, pak je zhodnotit, posoudit nebo doplnit hypotézy, ověřit jejich pravdivost, vyslovit závěr. Při realizaci hodiny v 8.A se podařilo žákům ukázat, že s chybou lze pracovat jako s příležitostí, jak najít cestu ke správnému řešení.

Před plánovanou hodinou by měl žák mít následující znalosti: Trojúhelník – označení vrcholů a stran, druhy trojúhelníků, přepona a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, druhé mocniny přirozených čísel.

6.9 Plán a realizace hodiny

	Aktivita	Role učitele a žáků
1	**Úvod hodiny** Běžná agenda, seznámení žáků s cílem hodiny.	Učitel zapisuje do třídní knihy, žáci vybírají sešity s domácím cvičením apod. Učitel sděluje žákům, že je čeká nový objev v matematice, tentokrát v geometrii.
2	**Rozcvička** „Zapamatujte si co největší počet čísel zapsaných na tabuli.“ Na tabuli jsou přirozená čísla z oboru do 20 a jejich druhé mocniny.	Učitel otočí na určitou dobu tabuli se zapsanými čísly (popř. čísla promítne). Žák má určitou dobu na zapamatování čísel, potom zapisuje čísla, která si zapamatoval, do sešitu.
3	**Kontrola samostatné práce** Individuální kontrola počtu čísel, která si žáci zapamatovali.	Učitel znovu ukáže napsaná čísla, potom se ptá, kolik čísel si kdo zapamatoval. Žák si sám určuje počet správných odpovědí. Učitel se ptá, podle čeho si žáci čísla zapamatovali. Žáci by měli objevit, že jde o čísla a jejich 2. mocniny. Učitel se ptá, jaká jsou to čísla. („Na prvním stupni jste pracovali hlavně s čísly přirozenými. Jaká další čísla jste potom poznali? Jaká čísla jsou napsaná na tabuli?“) Je možné nejprve se zeptat na počet zapamatovaných čísel, potom teprve provést kontrolu správnosti a znovu porovnat počet správných odpovědí.

4	**Úvod k novému učivu – přechod ke geometrii** Opakování pojmů z geometrie, trojúhelník jako rovinný útvar.	Učitel se ptá, se kterými geometrickými útvary se žáci dosud setkali. („Geometrie se zabývá mimo jiné rovinnými útvary, jako je například úsečka nebo kružnice. Znáte nějaké další geometrické útvary?“) Žáci uvádějí přímka, čtverec, trojúhelník apod. Pozn.: Učitel může připravit nabídku různých pojmů a žáci mohou rozhodovat, zda se jedná o geometrické útvary.
5	**Opakování znalostí o trojúhelnících** Třídění trojúhelníků	U: „Do jakých skupin dělíme trojúhelníky? Na jaké druhy?“ Učitel ukazuje obrázky různých trojúhelníků na interaktivní tabuli, žáci zapisují druh daného trojúhelníku do sešitu. Pro kontrolu pracuje jeden žák u tabule. Pozn.: Je vhodné pracovat se situacemi, kdy lze daný trojúhelník zařadit do více skupin (např. rovnoramenný, ostroúhlý), a s tzv. zdánlivými modely a překvapivými modely. Můžeme pokládat otázky: „Existuje trojúhelník, který je zároveň rovnoramenný a pravoúhlý? Který je zároveň rovnoramenný a tupoúhlý, který je zároveň rovnostranný a pravoúhlý?“ Formulace odpovědi („přepona bude vždy delší než odvěsna, nemohou být stejně dlouhé“) se dá využít v následujících činnostech.
6	**Označení trojúhelníků** Označení vrcholů, stran, název trojúhelníka	Učitel žádá žáky o označení trojúhelníků narýsovaných na tabuli. Vyvolaní žáci doplňují označení na tabuli. Učitel nabízí i méně tradiční označení a diskutuje s žáky, zda je možné.
7	**Pojem odvěsna a přepona** Rozlišení přepony a odvěsny v pravoúhlém trojúhelníku.	Učitel rozdává pracovní listy s pravoúhlými trojúhelníky, totéž je připraveno na interaktivní tabuli. Žáci označují pravé úhly a zeleně obtahují přeponu, červeně odvěsny, popisují strany. Kontrola probíhá samostatně, jeden vyvolaný žák pracuje na tabuli. Pozn.: Na pracovním listu by mohl být alespoň jeden trojúhelník nepravoúhlý.
8	**Objevování vztahu mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka** Objevitelská činnost žáků ve skupinách, hledání pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými stranami, experimentování ve čtvercové síti.	Učitel zadává žákům úkol pro samostatnou práci ve skupinách: zkoušet ve čtvercové síti vytvořit trojúhelníky, které budou mít jenom celočíselné strany. Žáci mohou pracovat pomocí pravítka, kružítka, na pomoc dostanou čtvercovou síť a čtverce s celočíselnými stranami (vystřižené ze stejné čtvercové sítě). Žáci se rozdělují do skupin po čtyřech. Do skupiny dostávají pracovní listy a vystřižené čtverce. Velikosti stran objevených trojúhelníků chodí zapisovat na tabuli. Učitel sleduje práci skupin, ale příliš do ní nezasahuje. Pozn.: Učitel by neměl příliš mluvit o rozměrech v centimetrech a zdůrazňovat měření. Žáci potom nepracují s pomocnými čtverci a objevení Pythagorovy věty se prodlužuje. (Lze zvážit užití sítě a pomocných čtverců v jiných jednotkách než centimetr, ale omezíme tím možnost volby metody práce žáků.)

9	**Přechod od Pythagorejských trojic k Pythagorově větě** Vyslovení hypotézy, formulace Pythagorovy věty jazykem žáků, ověření hypotézy, zpřesňování formulace věty	Po nalezení několika trojic rozměrů stran, které odpovídají zadání, učitel vyzývá žáky k hledání vztahu mezi velikostmi stran. Jednotliví žáci vyslovují svoji hypotézu, ta je všemi ověřována na nalezených trojicích (žáci počítají samostatně do sešitu). V případě potřeby učitel vede žáky k myšlence zjištění obsahu čtverců nad odvěsnami a nad přeponou, žáci hledají vztah mezi obsahy. Nejprve jsou na tabuli napsané trojice čísel, velikosti stran, a žáci se snaží najít vztah mezi těmito čísly. V případě potřeby lze ukázat na jednom trojúhelníku znovu, jak byl čtverec přikládán k přeponě a jak by se daly přiložit čtverce k odvěsnám. Dalším pomocným krokem může být otázka, co všechno můžeme o těchto čtvercích zjistit. Pomocné kroky vyústí v zápis trojic obsahů čtverců a hledání vztahů mezi nimi. Pozn.: Tato etapa by neměla být uspěchána. Podle zkušeností členů týmu je vhodné psát žákovské hypotézy slovně na tabuli, nepotvrzené hypotézy škrtat. Žádnou hypotézu nekritizujeme předem a nezavrhujeme ji bez vysvětlení (vedeme žáky k hledání situace, pro kterou by věta neplatila).
10	**Závěr hodiny: Formulace Pythagorovy věty**	Po slovní formulaci věty nalézají žáci ve spolupráci s učitelem algebraický zápis Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$. Učitel připomíná, že vztah byl nalezen pro pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami, a ptá se, co je třeba zkoušet v příští hodině. Žáci svými odpověďmi vytvářejí plán další hodiny (zjistit, zda vztah platí pro všechny trojúhelníky, zda musí být strany pravoúhlého trojúhelníka celočíselné).

6.10 Popis realizace

Hodina byla realizována ve dvou osmých třídách stejné základní školy. V obou třídách se použitá metoda ukázala jako efektivní, žáci dospěli k objevu Pythagorovy věty, i když s rozdílnou podporou učitele. Z průběhu hodiny bylo zřejmé, že poměrně jednoduchá možnost hledat pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými stranami ve čtvercové síti pomocí pravítka či pomocí připravených čtverců vystřižených ze čtvercové sítě aktivizovala i slabší žáky. Jednotlivé skupiny mohly pracovat různým způsobem; velikost čtvercového papíru umožňovala individuální činnost i v rámci skupiny, některé skupiny pracovaly od počátku týmově, kdy jeden žák kreslil, ostatní dávali pokyny a náměty.

Dále uvádíme průběh hodiny v jedné třídě, názory a doporučení ze společné reflexe hodiny a postřehy učitelky po opakovaném sledování záznamu hodiny, kterou učila.

Úvod hodiny Probíhá běžná agenda na začátku hodiny – zápis do třídní knihy, zjištění, kdo chybí, vybírání domácích úkolů. U: „Dneska to bude trochu jinak. Budete o něco chytřejší, budete znát další vlastnost trojúhelníku.“	Je patrná nervozita učitelky, také žáci jsou zaražení.

Proč tam není něco o objevu („Sami budete objevovat …, naučíte se metodu …“)?
I když je třída zvyklá na natáčení, přítomnost kamer ve třídě je nestandardní.

Rozcvička
Žáci si mají zapamatovat co největší počet čísel zapsaných na tabuli (na tabuli jsou přirozená čísla z oboru do 20 a jejich druhé mocniny).
Žáci počítají samostatně do sešitu, kontrola probíhá společně. Učitel se ptá, podle čeho si žáci čísla zapamatovali. Žáci odpovídají, že podle druhých mocnin.
U: „Jaká jsou to čísla?“Žáci nereagují, učitelka jim nabízí číselné obory, které probírali.Teprve potom odpovídá žákům, že jsou to čísla celá.

Nejprve se učitelka ptá, kolik čísel si kdo zapamatoval, potom teprve ukáže čísla napsaná na tabuli a znovu probíhá kontrola.
Je patrná zkušenost učitelky, žáci si nejdříve připravují sešity, potom teprve učitelka vysvětluje úkol.

Žáci se nemohou „rozjet“, učitelka je stále pobízí k činnosti.

Proč probíhá kontrola ve dvou etapách? Je to úmyslné? Chybí upřesnění, že jde o čísla přirozená.

Úvod k novému učivu – přechod ke geometrii
U: „Co jsme se v geometrii učili?
Které pojmy do geometrie patří?“
Žák začíná vyjmenovávat (úsečka, kružnice, trojúhelník).

Žáci nereagují, jsou pasivní; učitelka je povzbuzuje. Učitelka vždy opakuje slovo, které řekl žák. (Z aktérů postupně padá tréma z kamer, začínají se chovat přirozeně.)

Když žáci nereagovali, mohla učitelka říkat různé pojmy a žáci mohli rozhodovat, které jsou geometrické.

Opakování znalostí o trojúhelnících – druhy trojúhelníků
U: „Do jakých skupin dělíme trojúhelníky? Na jaké druhy?“
Učitelka ukazuje obrázky různých trojúhelníků na interaktivní tabuli, žáci zapisují druh trojúhelníka do sešitu. Jeden žák pracuje pro kontrolu u tabule.
U šestého trojúhelníku žák neumí druh určit, učitelka vyvolá dalšího žáka.

Žáci si bez opory o obrázek dlouho nemohou vybavit druhy trojúhelníků. Učitelka žákům hodně napovídá (tupo-…), aby se dočkala odpovědi.
Třída je klidná, všichni pracují, ale ne všichni mají odpovědi správně.
Při kontrole má vyvolaný žák problémy, když určí druh trojúhelníka, učitelka se ptá: „Proč?“, dává upřesňující otázky, ale někdy si na ně odpovídá sama („Kde? U vrcholu *A*.“).

Učitelka mohla nejdříve pracovat s obrázky na interaktivní tabuli („Jaký je rozdíl mezi trojúhelníky, jak se jmenují“); žáci by na to přišli. Učitelka dbá na vyjadřování žáků („Ne tuto, ale …“).
Objevuje se nevyužitá situace: daný trojúhelník lze zařadit do více skupin podle druhu (rovnoramenný, ostroúhlý), ale učitelka to říká sama.
Místo vyvolání jiného žáka mohla učitelka žákovi, který neuměl pojmenovat šestý trojúhelník, poradit, aby si všiml, jaké jsou strany, jaké jsou úhly.

Popis trojúhelníků
Ž: „ABC.“
U: „Vymyslíš něco originálnějšího?“
U: „Velikosti stran popisujeme…“
Ž: „Velikosti stran popisujeme malými písmeny.“
Učitelka říká, že trojúhelník vypadá jako rovnoramenný.

Je dobré, že učitelka vede žáky k různému popisu, i méně tradičnímu. Mohla se také zeptat, zda se daný trojúhelník může pojmenovat jako *CBA, XYZ*.
Učitelka mohla také uvést: „Jak se o tom přesvědčíme?“

Pojem odvěsna a přepona
U: „U pravoúhlých trojúhelníků jsme užívali pojem přepona a odvěsna.“

Žáci pracují, třída začala být aktivní. Poměrně jednoduchý úkol aktivizoval i slabší žáky.

Učitelka rozdává pracovní listy s pravoúhlými trojúhelníky, totéž je připraveno na interaktivní tabuli. Žáci označují pravé úhly a zeleně obtahují přeponu, červeně odvěsny, popisují strany. Kontrola probíhá samostatně.

Na pracovním listu mohl být jeden trojúhelník nepravoúhlý, aby si žáci znovu uvědomili, že o přeponě mluvíme u pravoúhlých trojúhelníků, nelze tedy jenom obtáhnout nejdelší stranu.

Objevování vztahu mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka

Učitelka zadává žákům úkol pro samostatnou práci ve skupinách – zkoušet ve čtvercové síti vytvořit trojúhelníky, které budou mít jenom celočíselné strany.
Žáci dostávají pracovní listy.
U: „Můžete zapisovat, pracovat pomocí pravítka, kružítka, na pomoc dostanete i čtverce s celočíselnými stranami.“ Učitelka znovu nabízí vystřižené čtverce.
Velikosti stran objevených trojúhelníků chodí žáci zapisovat na tabuli.

Žáci dostávají čtverečkované papíry a vystřižené čtverce s celočíselnými velikostmi stran. Pracují ve skupinách po 3–4 (dvě lavice za sebou), diskutují, práce je evidentně baví, všichni se do ní ponořili. Vesměs nepoužívají připravené čtverce, ale měří strany pomocí trojúhelníku.
Papír je dost velký, aby mohli vedle sebe pracovat všichni současně. Někde zkoušejí hledat všichni paralelně, jinde zakresluje jeden a ostatní diskutují a radí mu.
Jedna skupina objevila trojúhelník odpovídající zadání (3, 4, 5). I když je jeden trojúhelník nalezen, žáci pracují dál, úkol je zaujal, objevují další trojice, ale i trojice již objevené jinou skupinou (6, 8, 10). Jedna skupina objevila možnost užití podobnosti, jenom „posouvají“ přeponu (9, 12, 15 a 12, 16, 20). Je vidět radost týmů, které trojice objevily. Skupiny komunikují navzájem, chlubí se objevem.

Učitelka podrobně vysvětlila úkol, ale nemusela mluvit o centimetrech, nemusela zdůrazňovat „Pokud ji přeměříte,…“, protože to vedlo žáky k měření, a ne k práci s pomocnými čtverci, které měli také k dispozici.

Přechod od Pythagorejských trojic k Pythagorově větě

Žáci si myslí, že podobnost dá vždy požadovaný výsledek, musí jít vždy o násobek stran.
Učitelka navrhuje, aby to ověřili na jiném trojúhelníku, který byl objeven (5, 12, 13).
Učitelka vede žáky k myšlence zjištění počtu čtverců (obsah čtverce) nad odvěsnami a nad přeponou. Na tabuli kreslí situaci pro první objevený čtverec (32, 42, 52). Jeden žák společně s učitelkou vyslovuje hypotézu o součtu. Hypotéza se ověřuje pro další nalezené trojúhelníky – žáci počítají samostatně do sešitu.
U: „Zkuste říct vlastními slovy, jaký vztah platí mezi délkami odvěsen.“
Žák vyslovuje větu a píše na tabuli: „Nejdřív (když) sečteme ty menší (nejmenší) strany, tak dostaneme (tu) největší stranu.“
U: „3 + 4 = 5?“
Učitelka ve spolupráci s žáky: „Musíme sečíst obsahy. Když sečteme obsahy čtverců nad odvěsnami, vyjde nám obsah čtverce nad přeponou.“
U: „Pro naše trojúhelníky, které mají pravý úhel, to platí, kdyby náhodou neměly pravý úhel, to znamená, měla jsem délky stran 4, 5, 6, neplatí to.“

Hypotézu vyslovují žáci. Hypotéza není potvrzena.

I po práci ve skupinách a diskusi se třída vrací v klidu k řešení do sešitu, atmosféra je stále pracovní.

U: „Takže jsme si odvodili, že pro celočíselné odvěsna
na druhou plus odvěsna na druhou rovná se přepona na
druhou."
Učitelka označuje strany trojúhelníka.
U: „Zapíšeme si zkráceně."
Učitelka píše na tabuli a říká: $a^2 + b^2 = c^2$.
U: „Příští hodinu budeme ověřovat, zda Pythagorova věta
platí pro všechny trojúhelníky."

Učitelka nechá žáky ověřit hypotézu samostatně, nechá je užívat běžnou řeč.
Vzniklá situace byla dobře využita, užitím protipříkladu byla samotnými žáky hypotéza o násobcích stran vyvrácena.
Tato část však oddálila nalezení vztahu mezi čtverci nad stranami a učitelka začíná ve zbývající části hodiny spěchat.
Dobře se povedlo, že první verze věty je uvedena chybně (sečtení velikostí stran). S formulací je možné dále pracovat.
Také je dobré, že učitelka nechává žáky používat přirozený jazyk.
Poslední část hodiny je trochu uspěchaná, žáci by jistě přišli na formulace sami.
Jak žáci vědí, že trojúhelník o stranách 4, 5, 6 není pravoúhlý? Mohlo to být připravené například na interaktivní tabuli.
Učitelka chtěla, aby byla hodina ukončena zápisem Pythagorovy věty ve tvaru $a^2 + b^2 = c^2$, ale vzhledem k času se to mohlo nechat na další hodinu a vyjít potom ze slovního vyjádření, které již bylo objeveno. Ve spěchu učitelka nepřesně uvádí, že a^2 je délka jedné odvěsny.

6.11 Reflexe vyučující

Závěrečné shrnutí reflektuje zkušenosti vyučující, která vedla experimentální hodinu (pro větší autenticitu ponecháváme v první osobě jednotného čísla):

> Úvod hodiny probíhal dost strnule a nervózně, přítomnost kamer ovlivnila pohodu při práci vyučující (tedy moji) i žáků. Ti byli ve srovnání s běžnými hodinami málo aktivní a odpovídali stručně a heslovitě, mluvila jsem proto větší část hodiny, než jsem plánovala. V opakování učiva jsme na tom byli dost špatně, projevily se větší neznalosti, než jsem očekávala. Přínosem byla prezentace na interaktivní tabuli, která byla dobře čitelná, přehledná a žáky nezdržovala. Souběžná práce na jednom cvičení na pracovních listech zapojila všechny ve třídě, pak si kontrolovali výsledky sami s tabulí.
>
> V druhé části hodiny při skupinové práci už trochu opadla tréma, žáci pracovali rádi, domlouvali se spolu na postupu a některé skupiny začaly i vzájemně soutěžit. Delší dobu, než jsem čekala, trvalo objevení prvního pravoúhlého trojúhelníku. Následující trojúhelníky už skupiny zjišťovaly rychleji. Žáci si všimli podobnosti trojúhelníků, proto jsme dopsali ještě jeden, který s nimi podobný nebyl.
>
> Velmi pěkně se ve třídě povedlo vyvodit hypotézu a následný vztah mezi stranami. Hezky třída spolupracovala po zápisu špatné/chybné hypotézy (která však byla pro objev velmi důležitá), kdy už jen stačilo opravit zápis, a žáci došli sami k novému vztahu. V tomto momentě jsem žáka záměrně neopravila, ale nechala jsem třídu, aby mohla omyl odhalit sama.
>
> Závěr hodiny se ale moc nezdařil, projevil se už také spěch a únava. Lépe by bylo nechat symbolický zápis $a^2 + b^2 = c^2$ až na další hodinu a zůstat pouze u slovního vyjádření.
>
> Největším přínosem této hodiny pro žáky podle mě bylo to, že si sami hledali cestu i emočně prožili objevení poznatku. Většina dětí má teď trochu představu, kde se „záhadný" vztah $a^2 + b^2 = c^2$, vlastně vzal a co znamená. Při pouhém sdělení této rovnosti to ve svém věku a stupni poznání chápou asi jen výjimeční žáci.
>
> Mně videonahrávka odkryla slovní parazity, zlozvyky a chyby. Přínosem pro mě bylo navržení a vyzkoušení úplně nové metody objevování Pythagorovy věty v praxi.

Literatura

- Artique, M., Baptist, P., Dillon, J., Harlen W., Léna, P. (2011). *Learning through inquiry. The Fibonacci Project Resources* [online]. [cit. 15. 9. 2015]. Dostupné z: http://fibonacci-project.eu
- Dabell, J., Keogh, B., Naylor, S. (2008). *Concept Cartoons in Mathematics Education.* Sandbach: Millgate House Education.
- Fernandez, C., Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah.
- Fujii, T. (2015). Designing and Adapting Tasks in the Japanese Lesson Study: Focusing on the Role of the Quasi-variable. In J. Novotná, H. Moraová (Eds.), *International Symposium Elementary Maths Teaching SEMT '15. Proceedings* (pp. 9–18). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Hart, L. C., Alston, A., Murata, A. (Eds.) (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education.* The Netherlands: Springer.
- Hejný, M., Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice.* Praha: Fraus.
- Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.) (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: PedF UK v Praze.
- Hošpesová, A. (2014). Badatelsky orientovaná výuka matematiky na 1. stupni ZŠ a příprava učitelů. In Uhlířová, M. (Ed.). *Matematické vzdělávání v primární škole – tradice, inovace: Sborník příspěvků z konference s mezinárodní účastí* (s. 8–14). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
- Janík, T. a kol. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky.* Brno: Masarykova univerzita, 434 s.
- Kupčáková, M. (2015). *Tematický okruh Geometrie v rovině a v prostoru, Standardy Matematika* (rukopis). Hradec Králové: PřF UHK.
- Linn, M. C., Davis, E. A., Bell, P. (Eds.) (2004). *Internet environments for science education.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers. [online]. [cit. 15. 9. 2015]. Dostupné z: http://f3.tiera.ru/1/genesis/645-49/649000/e3914554debcad2ca0810c46716a87a4
- Macháčková, J. (2012). *Kolektivní reflexe v přípravě studentů učitelství 1. stupně v matematice.* Dizertační práce. http://www.math.cas.cz/fichier/theses/these_20121206073334_61.pdf
- Nezvalová, D. (2003). Akční výzkum ve škole. *Pedagogika*, roč. LIII, 300–307.
- Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H., Krátká, M. (2006). Příprava a analýza didaktických situací. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF (CD ROM).
- *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Prague: Research Institute of Education in Prague, 126 p, [online]. [cit. 15. 9. 2015]. Dostupné z: www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/ RVPZV_2007-07.pdf.
- Rendl, M., Vondrová, N. a kol. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta.
- Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholt, S., Köller, O. (2013). *A definition of inquiry-based STM education and tools for measuring the degree of IBE (No. D2.5).* Kiel.
- Slavík, J., Janík, T., Jarníková, J., Tupý, J. (2014). Zkoumání a rozvíjení kvality výuky v oborových didaktikách: metodika 3A mezi teorií a praxí. *Pedagogická orientace*, 24(5), 721–752.
- Ulrychová, M. (2011). *Konstrukce poznatků žáky v matematice (na příkladu Pythagorovy věty).* Disertační práce. Praha: PedF UK v Praze.

Mezinárodní šetření TALIS 2013

Zkušenosti s využitím inovativní metody vzdělávání učitelů matematiky

Zpracovaly:
PhDr. Jana Cachová, PhD., doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.,
doc. PhDr. Alena Hošpesová, PhD., PhDr. Magdalena Krátká, PhD.,
doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

První vydání.
Vydala: Česká školní inspekce, Fráni Šrámka 37, Praha 5, v roce 2015, v nákladu 1500 výtisků.

www.csicr.cz

ISBN 978-80-88087-04-5

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ