



s pomocí tradičních matematických obsahů „funkce“ a „algebra“, pomocí algebraických výrazů, rovnic a nerovnic, tabulek, grafických znázornění. Například testová úloha *CHŮZE* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) obsahuje dvě otázky, které spadají do kategorie *změna a vztahy*, protože se týkají algebraické závislosti dvou proměnných a vyžadují, aby žáci využili své znalosti a dovednosti z oblasti algebry. Žáci musí použít daný vzorec pro výpočet délky kroku – vzorec vyjádřený ve tvaru algebraického výrazu –, aby určili délku kroku v jedné otázce a rychlost chůze ve druhé. Změna a vztahy se často zachycují a interpretují pomocí statistiky. Chceme-li definovat a interpretovat *změnu a vztah*, je také třeba dobrá znalost oblasti čísel a jednotek. Zajímavé vztahy mají původ také v geometrických měřeních, např. možná závislost změny obsahu na změně průměru nebo vztahy mezi délkami stran trojúhelníku. Uvolněná úloha *PIZZY* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) je dalším příkladem kategorie *změna a vztahy*.

Nepovinné testování matematiky na počítačích v šetření PISA 2012 umožňuje, aby byly žákům předkládány dynamické obrázky a mnohonásobné, dynamicky propojené reprezentace. Dává však také příležitost manipulovat s funkcemi. Například změnu v čase (třeba růst nebo pohyb) lze zachytit přímo prostřednictvím animací a simulací, znázorníme ji pomocí navzájem propojených předpisů funkcí, grafů a tabulek. Hledání a používání matematických modelů změny lze obohatit, pokud lze změnu zkoumat a popisovat pomocí softwaru, který zakresluje grafy funkcí, nabízí změny parametrů, vytváří tabulky hodnot, umožňuje experimentování s geometrickými tvary, uspořádává a zakresluje data a dosazuje do vzorců. Obzvláště významné pro práci se vzorci a pro zakreslování dat jsou možnosti tabulkových a grafických editorů.

Prostor a tvar

Okruh *prostor a tvar* zahrnuje celou řadu jevů, se kterými se setkáváme každý den. Patří sem vzory, vlastnosti objektů, umístění a orientace, reprezentace objektů, kódování a dekódování vizuálních informací, pohyb a dynamická interakce s reálnými útvary i jejich reprezentacemi. Základ kategorie *prostor a tvar* tvoří geometrie, ale kategorie překračuje hranice tradičních geometrických obsahů, významů i metod a využívá prvky z dalších oblastí matematiky, jako jsou prostorová představivost, měření a algebra. Například obrazce se mohou měnit a bod se může pohybovat po množině bodů daných vlastností a to již vyžaduje pojmy z oblasti funkcí. Ústřední roli v této kategorii hrají nejen vzorce pro výpočet obsahu, obvodu, povrchu a objemu, ale do tohoto obsahového okruhu patří také manipulace s útvary a jejich interpretace v prostředí, která požadují využití matematických nástrojů softwaru dynamické geometrie či například systém určení přesné polohy (GPS).

Koncepční rámec PISA vychází z předpokladu, že matematická gramotnost v oblasti *prostoru a tvaru* vyžaduje porozumění základním pojmům a zvládnutí základních dovedností. Matematická gramotnost v této kategorii zahrnuje činnosti jako porozumění perspektivě (například na obrazech), zakreslování map a orientace na nich, geometrické transformace s použitím technologie i bez ní, interpretace reprezentací trojrozměrných objektů z různých úhlů pohledu a konstrukce geometrických útvarů. Zveřejněná úloha *TESAŘ* (viz „Ukázkové úlohy z matematiky“) spadá do tohoto okruhu, protože se zabývá další klíčovou vlastností prostoru a tvaru – vlastnostmi útvarů. Tato komplexní položka s možností výběru odpovědi předkládá žákům čtyři možné návrhy záhonu. Úkolem žáků je určit, který z nich lze ohraničit 32 metry prken. Řešení vyžaduje využití geometrických poznatků a uvažování, neboť žáci sice mají k dispozici dostatek údajů, aby mohli spočítat přesný obvod tří záhonů; ale údaje o čtvrtém záhonu jsou nepřesné a žáci musí použít schopnost geometrické dedukce.

Nepovinné testování na počítači žákům umožňuje manipulovat s dynamickými reprezentacemi útvarů a zkoumat vztahy mezi různými geometrickými objekty i vztahy uvnitř těchto objektů v trojrozměrném prostoru, neboť jimi lze otáčet a vytvořit si tak v mysli jasnou představu. Žáci mohou pracovat s mapami, které lze zvětšovat a otáčet, přitom si udělají jasnou představu o určitém místě, a tak použijí tyto nástroje k plánování trasy. Mohou si vybrat a použít virtuální nástroje pro měření (např. velikostí úhlů a délek úseček) na nákresech, obrázcích a modelech a tato data pak použít k výpočtům. Technologie žákům umožňují propojit znalosti z geometrie s vizuálními informacemi a vytvořit si tak jasnější představu o problému. Například chceme-li zjistit objem hrnku, můžeme s ním otáčet, abychom si ověřili, že jde o komolý kužel, abychom určili výšku a našli, kde ji lze změřit, a abychom došli k závěru, že útvary nahoře a dole, jež v rovině vypadají jako elipsy, jsou v trojrozměrném prostoru kruhy.

Kvantita

Pojem *kvantita* je nejrozšířenější a nejzákladnější stavební kámen matematiky. Patří sem kvantifikace vlastností objektů, vztahů, situací a entit ve světě, porozumění různým reprezentacím těchto kvantifikací a posuzování interpretací a argumentů založených na kvantitě. Pokud se snažíme kvantifikovat svět, musíme rozumět měření,